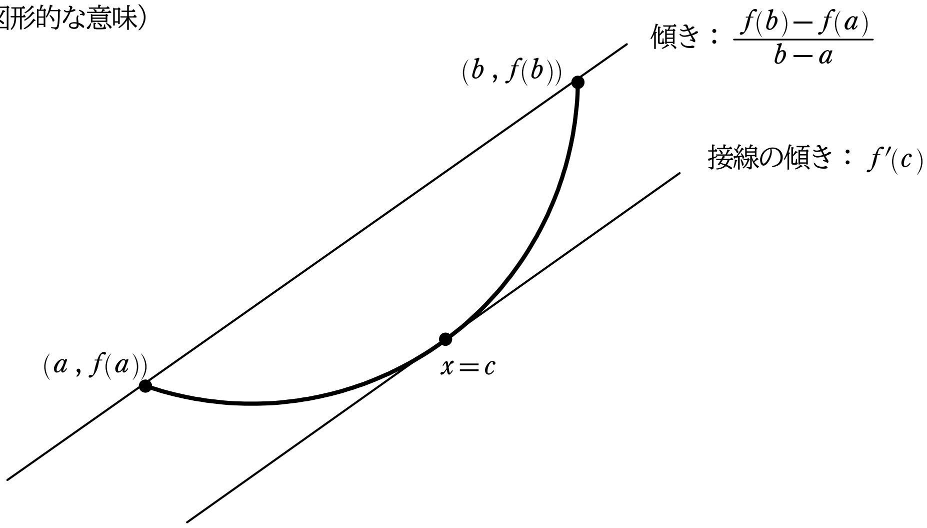
平均値の定理と漸化式、極限（応用編①）

平均値の定理は、数Ⅲの微積分において極めて大きな位置を占めています。今回は、その平均値の定理が主役です。まずは、その復習をしましょう。

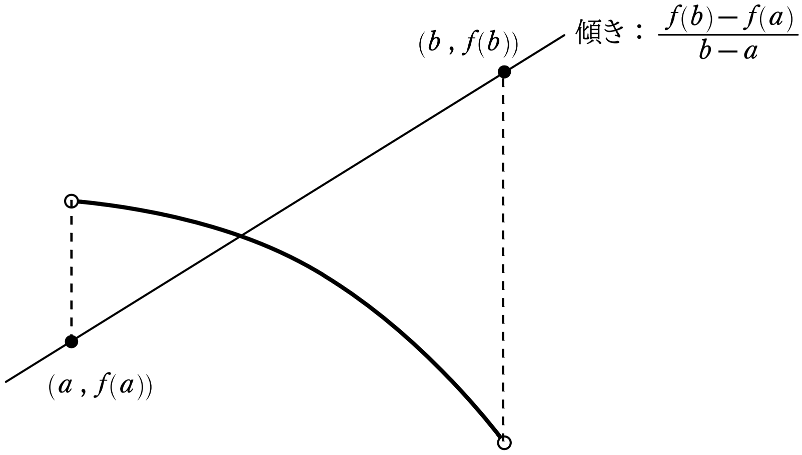
【平均値の定理】

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a\,,b]$ で連続、かつ開区間 $(a\,,b)$ で微分可能ならば、 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, $a<c<b$ を満たす実数 c が（少なくとも1つ）存在する。

（平均値の定理の図形的な意味）



上図において、両端を結んだ直線の傾きと同じ傾きの接線が少なくとも1つ $a<c<b$ の範囲にあることは一目瞭然ですね。ところで、どうして閉区間 $[a\,,b]$ で連続であることが必要か分かりますか。もし、連続でないと次のような場合が起こりえます。この場合、 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, $a<c<b$ を満たす実数 c は存在しませんね。



では、いよいよ本番です。

$\boxed{\text{問題}}$ $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$ とする。

(1) $x=f(x)$ はただ1つの解を持つことを証明せよ。

(2) 任意の $x\,,y$ に対して $|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{1}{2}|x-y|$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 任意の a に対して、 $a_0=a$, $a_n=f(a_{n-1})$ （ $n\geqq1$ ）で定められる数列 $\{a_n\}$ は、 $x=f(x)$ の解に収束することを証明せよ。（三重大）

平均値の定理と漸化式、極限（応用編 ①）

解答

(1) $g(x)=x-f(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$ とおいて、この関数が x 軸とただ1つの交点を持つことを示せばよい。$g(x)$ は全ての実数 x について連続であり、$g'(x)=1+\frac{1}{2}\sin x>0$ より、$g(x)$ は単調増加である。ところで、$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 、また $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ だから、$g(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$ のグラフは x 軸とただ1つの交点を持つ。すなわち、$x=f(x)$ はただ1つの解を持つと言える。

(2) $x=y$ のとき、明らかに $|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ は成立します。

$x\neq y$ のとき、この問題は両辺共に絶対値が付いていますから、$x>y$ のときに成り立つことが証明できれば $x<y$ のときも当然成り立つと言えますから、$x>y$ として証明することにします。

$$|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y| \iff \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq\frac{1}{2}$$

さて、$f(x)$ は全ての実数について連続、かつ連続ですから、閉区間 $[y,x]$ において連続、かつ開区間 (y,x) において微分可能です。よって、平均値の定理より $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ ，$y<c<x$ を満たす実数 c が（少なくとも1つ）存在します。ところで、$f(x)=\frac{1}{2}\cos x$ ですから、$f'(c)=-\frac{1}{2}\sin c$ となり、$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ より

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\frac{1}{2}\sin c$ となります。よって、$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|-\frac{1}{2}\sin c\right|\leqq\frac{1}{2}$ より

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq\frac{1}{2}$ よって $|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ が成り立つと言えます。先に述べたように、$x<y$ のときも同様に成り立ちますね。

以上より、任意の x,y に対して $|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ が成り立つと言えます。

(3) $|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ は任意の実数 x,y について成り立つ訳ですが、今、y が $x=f(x)$ を満たすただ1つの解であるとし、$x=a_{n-1}$ とします。このとき、$|f(x)-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$ は $|f(a_{n-1})-f(y)|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-y|$ つまり、

$|a_n-y|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-y|$ となります。更に $|a_{n-1}-y|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-2}-y|$ が成り立ちますから、

$|a_n-y|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-y|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-y|$ つまり $|a_n-y|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-y|$ が成り立つと言えます。

これをずっと繰り返すと、$|a_n-y|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a_0-y|$ つまり $|a_n-y|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-y|$ すなわち

$0\leqq|a_n-y|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-y|$ が成り立つと言えます。勿論、$\lim_{n\to\infty}0=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-y|=0$（$\because$ $a-y$ は有限な定数です。）だから、はさみ打ちの定理（あるいは、はさみ打ちの原理）より、$\lim_{n\to\infty}|a_n-y|=0$ つまり

$\lim_{n\to\infty}a_n=y$ が成り立ち、数列 $\{a_n\}$ は、$x=f(x)$ の解に収束すると言えますね。（※ y が $x=f(x)$ を満たすただ1つの解であるとしたことを思い出して下さい。） この問題、歯ごたえはあるけど、面白い問題です。Enjoy!