メジアン（新課程）100番

by Aokijuku

問題　実数 α が $\alpha^3=5$ を満たすとき．次の問いに答えよ。

(1)　α は有理数ではないことを示せ。

(2)　全ての有理数 p，q に対して，$\alpha^2+p\alpha+q\fallingdotseq 0$ であることを示せ。

方針　α は実数であって有理数でないということですから，α が無理数であることを示せば良いですね。無理数というのは「循環しない無限小数」のことですから，それを正面から証明するなんてことは出来ません。こんなときは「背理法」を使って証明すれば良いですね。つまり，α が有理数であると仮定し，矛盾点を導き出せばよいのです。勿論，有理数とは $\dfrac{\text{整数}}{\text{自然数}}$ （あるいは $\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ と表しても良いですね。但し，分母が0でないことを指摘することを忘れてはいけません。）で表される数字のことですよ。

解答　(1)　α が有理数であると仮定し，$\alpha=\dfrac{n}{m}$ （但し，m，n は互いに素の整数。$m\fallingdotseq 0$ ）と表すと，$\alpha^3=5$ より

$\dfrac{n^3}{m^3}=5$　つまり $n^3=5m^3$ より，n^3 は5となり，n は5の倍数であると言える。よって $n=5k$ （k は整数）とおいて $n^3=5m^3$ に代入すると $125k^3=5m^3$　つまり $m^3=25k^3$ より m^3 は5の倍数だから m は5の倍数となる。このとき，m，n は共に5の倍数となり，m，n が互いに素の整数であることに反し矛盾する。よって α は有理数ではなく無理数であると言える。

(2)　$\alpha^2+p\alpha+q=0$ であると仮定すると，$\alpha^2=-p\alpha-q$ となる。この両辺に α をかけて

$\alpha^3=-p\alpha^2-q\alpha$　つまり　$5=-p(-p\alpha-q)-q\alpha$　すなわち　$(p^2-q)\alpha=5-pq$ …①　となる。

$p^2-q=0$ …② だとすると，$5-pq=0$ …③ となり，②より $q=p^2$ として，これを③に代入すると $p^3=5$ となる。

つまり $p=\alpha$ となり，α が無理数であることに反して矛盾する。

また，$p^1-q\fallingdotseq 0$ とすると，①より $\alpha=\dfrac{5-pq}{p^2-q}$ となり，α が有理数となってしまい，α が無理数であることに矛盾する。

以上より　$\alpha^2+p\alpha+q=0$ ではなく $\alpha^2+p\alpha+q\fallingdotseq 0$ となる。