メジアン（新課程）101番

$\boxed{\text{問題}}$

(1)　m が自然数のとき，$\sqrt{m}$ が整数でなければ，$\sqrt{m}$ は無理数であることを証明せよ。

(2)　n が２以上の整数のとき，$\sqrt{n^2+3}$ は無理数であることを証明せよ。

$\boxed{\text{方針}}$　(1) も (2) も正面から証明するのは難しい（あるいは出来ない）ので, (1) は対偶を使い，(2) は背理法を使って証明することにします。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　与えられた命題の対偶は,「m が自然数のとき，$\sqrt{m}$ が有理数ならば，$\sqrt{m}$ は整数である」ですから，これを証明すれば, 元の命題を証明したことになりますね。

さて, $\sqrt{m}$ が有理数であるから，$\sqrt{m}=\dfrac{q}{p}$ (但し、 p , q は互いに素の自然数）とし、両辺を２乗すると　$m=\dfrac{q^2}{p^2}$

m は自然数で，p^2 と q^2 は互いに素だから, $p^2=1$ となります。 p は自然数だから $p=1$ となり，$m=q^2$ より

$\sqrt{m}=q$ となり $\sqrt{m}$ は整数と言えます。よって, 与えられた命題の対偶が真だと言えたので，もとの命題も真だと言えます。

(2)　(1) の証明の結果を利用すると , 背理法により，n が２以上の整数のとき，$\sqrt{n^2+3}$ が整数でないこと証明すれば，$\sqrt{n^2+3}$ は無理数であると言えます。

さて，$\sqrt{n^2+3}$ が整数であると仮定し , $\sqrt{n^2+3}=m$（但し，m は2以上の自然数）とおき，

両辺を２乗すると　$n^2+3=m^2$　これを変形すると　$m^2-n^2=3$　より　$(m-n)(m+n)=3$ … ①

$m>n$ であり, m , n は自然数だから，$m+n>m-n>0$　このとき① を満たす自然数 $m-n$，$m+n$ の組は

$m-n=1$，$m+n=3$　　この連立方程式を解くと　$m=2$，$n=1$　となる。

これは，n が２以上の整数であることに反し矛盾する。よって，$\sqrt{n^2+3}$ は整数でない。

(1) で証明された命題より、n^2+3 は自然数であり，$\sqrt{n^2+3}$ が整数でないので $\sqrt{n^2+3}$ は無理数であると言える。