メジアン（新課程）105番

問題　n は整数とする。

(1)　$n(n+1)$ が偶数であることを示せ。

(2)　$n(n+1)(2n+1)$ が6の倍数であることを示せ。

(3)　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ が30の倍数であることを示せ。　（11 富山県立大）

方針　これらの問題は複数の解法が考えられますが，是非，合同式を使った解法を知って欲しいと思います。似たような問題はいくつもありますが，中には合同式を使わないと酷く解くのが難しい問題もあります。合同式は利用範囲が広く，シンプルな答案が可能です。

解答　(1)　偶数は $mod2$ を使えば0と合同で，奇数は同じく $mod2$ を使えば1と合同です。よって n は次の２つの場合があります。

(ア)　$n\equiv 0\ (mod2)$ の場合　$n(n+1)\equiv 0\ (mod2)$　よって $n(n+1)$ は偶数である。

(イ)　$n\equiv 1\ (mod2)$ の場合　$n(n+1)\equiv 2\equiv 0\ (mod2)$　よって $n(n+1)$ は偶数である。

(ア)，(イ) より n が整数のとき，$n(n+1)$ は偶数である。

(2)　$n(n+1)(2n+1)$ は $n(n+1)$ を因数に持っているから，偶数であることは明らかである。よって，$n(n+1)(2n+1)$ が3の倍数であることが言えれば，$n(n+1)(2n+1)$ は6の倍数であると言える。

$mod3$ で考えると，n は0，1，2の3つの場合があり，答案は次のようになる。

(ア)　$n\equiv 0\ (mod3)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)\equiv 0\ (mod3)$ となり，$n(n+1)(2n+1)$ は3の倍数である。

(イ)　$n\equiv 1\ (mod3)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)\equiv 3\equiv 0\ (mod3)$ となり，$n(n+1)(2n+1)$ は3の倍数である。

(ウ)　$n\equiv 2\ (mod3)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)\equiv 2\cdot 3\cdot 5\equiv 0\ (mod3)$ となり，$n(n+1)(2n+1)$ は3の倍数である。

(ア)，(イ)，(ウ) より，$n(n+1)(2n+1)$ は3の倍数であることが言え，また偶数でもあるので6の倍数であると言える。

(3)　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は $n(n+1)(2n+1)$ を因数に持っているから，6の倍数であることは明らかである。よって，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ が5の倍数であることが言えれば，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は30の倍数であると言える。$mod5$ で考えると，n は0，1，2，3，4の5つの場合があり，答案は次のようになる。

(ア)　$n\equiv 0\ (mod5)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\equiv 0\ (mod5)$ となり，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数である。

(イ)　$n\equiv 1\ (mod5)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\equiv 0\ (mod5)$ となり，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数である。

(ウ)　$n\equiv 2\ (mod5)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\equiv 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\equiv 0\ (mod5)$ となり，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数である。

(エ)　$n\equiv 3\ (mod5)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\equiv 3\cdot 4\cdot 7\cdot 35\equiv 0\ (mod5)$ となり，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数である。

(オ)　$n\equiv 4\ (mod5)$ の場合　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\equiv 4\cdot 5\cdot 9\cdot 59\equiv 0\ (mod5)$ となり，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数である。

(ア)～(オ) より，$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は5の倍数であることが言え，また，6の倍数でもあるので，30の倍数と言える。