メジアン（新課程）110番

問題 自然数 m, n に対して $x=8m+n$, $y=5m+2n$ とおく。x , y の最大公約数を d とする。

(1) m, n が互いに素ならば, $d=1$ または $d=11$ であることを示せ。

(2) $m=2$ のとき, $d=11$ となる最小の自然数 n を求めよ。（18学習院大）

方針 この手の問題はユークリッドの互除法を使って解くことが一般的ですが, まずユークリッドの互除法について簡単に復習しておきましょう。「a , b $(a>b)$ 2つの自然数について, $a=bq+r$ （ q は商, r は余り）であるとき, a と b の最大公約数は b と r の最大公約数に等しい。」というものですね。証明については別紙に譲りますが, これは原則であるものの, 上の問題を解く際には, やや拡張して理解する必要があります。まず, 割り算における商と余りについて再確認しましょう。例えば, ある整数 a を5で割る場合, $a=5\times$ 整数 $+r$ （ r は $0\leqq r<5$ の整数）と定義されます。従って, -3 を5で割る場合, 定義に従えば　$-3=5\times(-1)+2$　より, 商は -1 , 余りは2であるということになります。

　ところが, 合同式においては, ある整数を5で割る場合, -3 と2は同じであると見なします。すなわち $-3\equiv 2 \pmod{5}$ と表しますね。言ってみれば, 7を5で割る場合, $7=5\times1+2$, $7=5\times2-3$ より, 余りは2でもあるし -3 でもあるという解釈をしているとも言えます。このことを踏まえつつ, 互除法を拡張して利用します。

解答 (1)　$8m+n=(5m+2n)\times1+3m-n$　互除法より $8m+n$ と $5m+2n$ の最大公約数は, $5m+2n$ と $3m-n$ の最大公約数と一致する。更に $5m+2n=(3m-n)\times1+2m+3n$ より, $5m+2n$ と $3m-n$ の最大公約数は, $3m-n$ と $2m+3n$ の最大公約数と一致する。更に $3m-n=(2m+3n)\times1+m-4n$ より, $3m-n$ と $2m+3n$ の最大公約数は, $2m+3n$ と $m-4n$ の最大公約数と一致する。更に $2m+3n=(m-4n)\times2+11n$ より, $m-4n$ と $11n$ の最大公約数と一致する。さて, $m-4n$ と $11n$ の最大公約数は当然, $11n$ の約数であるが, m と n は互いに素だから, 最大公約数に n が因数として含まれることはない。つまり, 求める最大公約数は11の約数だから, 1または11であると言える。

(2)　$m=2$ より, $x=16+n$, $y=10+2n$　　$10+2n=(16+n)\cdot2-22$ より, $10+2n$ と $16+n$ の最大公約数は $16+n$ と22の最大公約数である。ところで, その最大公約数は11であるから, $16+n$ は11の倍数であるが, 22の倍数であってはならない。$1\leqq n$ より, $17\leqq16+n$　17以上の整数で, 11の倍数であるが22の倍数でない最小の整数は33だから $16+n=33$ より $n=17$ となる。

※一応、巻末の模範解答もよく読んで理解しておいてね。