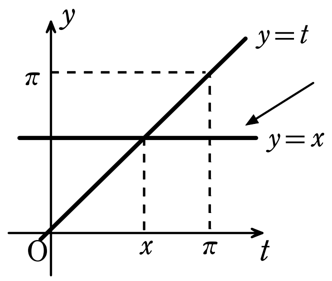
チョイス（6訂版）113番

by Aokijuku

問題　閉区間$[0\,,2\pi]$上で定義されたxの関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\dfrac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときのxの値をそれぞれ求めよ。　　　　（名古屋大）

方針　この問題の大切なポイントは，式の末尾のdtを見れば分かるようにtで積分しているから，tから見るとxは定数扱いされているということです。xの変域は$[0\,,2\pi]$から分かるように，$0\leqq x\leqq 2\pi$ であり，tの変域は$\int_0^{\pi}$から分かるように，$0\leqq t\leqq \pi$ です。これらのことを考えると，$|t-x|$ の絶対値を外すために，次の２通りの場合分けをしなければならないと言えます。１つ目は xの範囲がtの範囲を越える$\pi\leqq x$ の場合で，このとき $t-x\leqq 0$ となるから，絶対値は $|t-x|=-t+x$ と外せます。また $0\leqq x\leqq \pi$のとき，変数tと定数xの関係は次のグラフを利用すれば分かりますね。



xは定数扱いだから，t軸に平行になりますね。

○ $0\leqq t\leqq x$ のとき，$y=t$ のグラフは $y=x$ のグラフより下にあるから，$|t-x|=-t+x$ となります。
○ $x\leqq t\leqq \pi$ のとき，$y=t$ のグラフは $y=x$ のグラフより上にあるから，$|t-x|=t-x$となります。

これらのことを頭に入れた上で答案を作ってみましょう。

解答

（ｉ） $\pi\leqq x$ のとき

$t-x\leqq 0$ より，$f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\dfrac{\pi}{4}\right)dt=\int_0^{\pi}\sin\left(-t+x+\dfrac{\pi}{4}\right)dt$

$$=\left[-\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\times(-1)\right]_0^{\pi}=\left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$　　この範囲で　$-1\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ だから，

$f(x)$の最大値は2，このとき $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ より　$x=\dfrac{3}{4}\pi$

また，$f(x)$の最小値は-2，このとき $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ より　$x=\dfrac{7}{4}\pi$

（ii） $0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int_0^{x}\sin\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)dt+\int_x^{\pi}\sin\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=\left[-\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\times(-1)\right]_0^{x}+\left[-\cos\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^{\pi}$$

$$=\left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{x}+\left[-\cos\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^{\pi}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left\{-\cos\left(-x+\frac{5}{4}\pi\right)+\cos\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{5}{4}\pi\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}-2\left\{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{3}{4}\pi\right\}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

ところで $0\leqq x\leqq 2\pi$ より $-\frac{\pi}{2}\leqq x-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{3}{2}\pi$ よって $-1\leqq\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\leqq 1$ より

$f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ で，このとき $x-\frac{\pi}{2}=0$ より $x=\frac{\pi}{2}$

また 最小値は 0 で，このとき $x-\frac{\pi}{2}=\pi$ より $x=\frac{3}{2}\pi$

(ｉ), (ii) より，$f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$，最小値は -2 $\left(x=\frac{7}{4}\pi\right)$ となります。

補足　t による積分だから x を定数と見ること，x の場合分けのよる絶対値の外し方，

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ や $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ の正しい運用等々，

基礎の確実な理解が欠かせない問題ですが，問題としてはとても良くできた良問だと思います。チョイスがこの問題を数IIIの積分の標準問題として新たに掲載したことには十分納得がいきますね。繰り返し解いて，確実に身につけるようにしてください。