メジアン（新課程）117番の (3)

問題 整数 a , b , c が $0<a<b<c$ であり，かつ $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc+350$ を満たすとき，a , b , c を求めよ。 （16 藤田保健衛生大）

方針 この手の問題は, まず展開して整理し直すことが肝要です。左辺を展開すると２種類の文字を掛け合わせた３次式と $3abc$ が出てきます。そもそもが交代式であることを意識すると, 必ず同じタイプで文字が入れ替わったものが出てきますから，右辺の abc を左辺に移して整理すると $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=350$ となります。この左辺の b , c を２つとも a に置き換えるとどうなるでしょうか。当然, 左辺の方が小さくなりますね。すると a^3 だけが文字として残った単純な３次不等式が出来ます。それがこの問題の解き方のポイントになりますね。

解答 与式を展開して整理すると，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=350 \cdots$ ① となり，左辺の b , c を a に置き換えると　$0<a<b<c$ より　　$8a^3<350$　　$a^3<43\dfrac{3}{4}$　　これを満たす自然数 a は $a=1, 2, 3$ の3通りである。

(ア)　$a=1$ のとき ①式は　$b+c+b^2(c+1)+c^2(1+b)+2bc=350 \cdots$ ②となり, この式で c を b に変えると左辺の方が小さくなり，　$2b+b^3+b^2+b^2+b^3+2b^2<350$　左辺を整理すると　$2b^3+4b^2+2b<350$

$b^3+2b^2+b<175$　　$b(b+1)^2<175$ となる。この式を持たす b の値は $a<b$ であることを考慮すると

$b=2$, 3 , 4 の３通りである。

$b=2$ のとき, ②式より　$2+c+4c+4+3c^2+4c=350$

整理すると　$3c^2+9c-344=0$ となり，$c=\dfrac{-9\pm\sqrt{9^2+4\times3\times344}}{6}$　　344 を素因数分解すると

$344=2^3\times43$ だから　$c=\dfrac{-9\pm\sqrt{3^4+2^2\times3\times2^3\times43}}{6}$ より c は整数とならず不適。

$b=3$ のとき, ②式より　$3+c+9c+9+4c^2+6c=350$　整理すると　$4c^2+16c-338=0$　$2c^2+8c-129=0$

$129=3\times43$ となり　$2c^2+5c-129=0$ を係数が整数の形で因数分解できないから不適。

$b=4$ のとき, ②式より　$4+c+16c+16+5c^2+8c=350$　整理すると $5c^2+25c-330=0$

$c^2+5c-66=0$　$(c-6)(c+11)=0$　$0<a<b<c$ より $c=6$

以上より　$(a, b, c)=(1, 4, 6)$

(イ)　$a=2$ のとき　①式は　$4b+4c+b^2c+2b^2+2c^2+bc^2+4bc=350 \cdots$ ③となり, この式で c を b に変えると左辺の方が小さくなり，　$2b^3+8b^2+8b<350$　　$b^3+4b^2+4b<175$　　$b(b+2)^2<175$

この式を満たす b の値は $a<b$ であることを考慮すると　　$b=3$, 4 の２通りである。

$b=3$ のとき, ③式より　$12+4c+9c+18+2c^2+3c^2+12c=350$　整理すると

$5c^2+25c-320=0$　　$c^2+5c-64=0$　このとき条件を満たす自然数 c は存在せず不適。

$b=4$ のとき, ③式より　$16+4c+16c+32+2c^2+4c^2+16c=350$　整理すると

$6c^2+36c-302=0$　　$3c^2+18c-151=0$　このとき条件を持たす自然数 c は存在せず不適。

(ウ)　$a=3$ のとき　①式は　$9b+9c+b^2c+3b^2+3c^2+bc^2+6bc=350 \cdots$ ④　この式で c を b に変えると左辺の方が小さくなり，　$9b+9b+b^3+3b^2+3b^2+b^3+6b^2<350$　　$2b^3+12b^2+18b<350$　$b(b+3)^2<175$

この式を満たす b の値は $a<b$ であることを考慮すると，$b=4$ ですら満たさず不適である。

よって (ア) ～ (ウ) より, 与式を満たす整数解の組は　$(a, b, c)=(1, 4, 6)$　のみである。　何とも面倒くさい。