メジアン（新課程）117の (2)

問題　$x^2-xy+y^2-3y=0$ を満たす正の整数 x , y の組を求めよ。　（11 神戸学院大）

方針　一般的な定石が通用しない，まるでパズルのような問題です。ふつうは x , y の一次式に因数分解した式が, 整数 , あるいは自然数の積に表されたりするものなのですが，この問題はそうは問屋が許してくれません。

与式を $x^2+y^2=xy+3y$ と変形して，左辺が平方数の和であることを利用しようとしましたが，どうもうまくいきません。そこで両辺に $2xy$ を足して $(x+y)^2=3y(x+1)$ と変形して, 左辺が 3 を因数としているので，$x+y$ が 3 を因数に持つ自然数であることを突き止め, 具体的な候補を考え, 一応, 自然数x, y の組の候補を求めましたが, 残念ながらどこに限界があるのかが突き止められませんでした。そうこうしていうる間に, ハルト君が左辺を $(x-y)^2$ に変形することを思いついて, そこから活路が開けました。ハルト君, あっぱれです。でも, なんか悔しいですね。とはいえ, 手前まで持ってくることだって大変なんですよ。分かってね。えへへ。

解答　与式より，$x^2+y^2=xy+3y$　この両辺から $2xy$ を引くと $(x-y)^2=y(3-x)$

$(x-y)^2\geqq 0$　かつ　$y\geqq 1$ だから，$3-x\geqq 0$ となり，x が自然数であることから, $x=1, 2, 3$ が候補として求められます。

(ア)　$x=1$ のとき，与式より　$y^2-4y+1=0$　これを満たす自然数 y は存在せず不適。

(イ)　$x=2$ のとき，与式より　$y^2-5y+4=0$　これを解いて $y=1, 4$ となり適す。

(ウ)　$x=3$ のとき，与力より　$y^2-6y+9=0$　これを解いて　$y=3$ となり適す。

(ア) ～ (ウ) より，$(x, y)=(2, 1), (2, 4), (3, 3)$ となる。