メジアン（新課程）118番

問題　$\sqrt{n^2+11n-8}$ が整数となるような正の整数 n を全て求めよ。　　(20 岡山理科大)

方針　$\sqrt{n^2+11n-8}=m$（m は0以上の整数）とおいて，両辺を２乗するというのが定石だけど，何か一癖あるような予感がするな。とりあえず定石通り進めてみよう。

解答　$\sqrt{n^2+11n-8}=m$（m は0以上の整数）とおいて，両辺を２乗すると，$n^2+11n-8=m^2$

$n^2+11n+\left(\frac{11}{2}\right)^2-m^2=8+\left(\frac{11}{2}\right)^2$　　$\left(n+\frac{11}{2}\right)^2-m^2=\frac{32+121}{4}$

$\left(n+\frac{11}{2}+m\right)\left(n+\frac{11}{2}-m\right)=\frac{153}{4}$　　$153=3^2\times17$

かつ　$n+\frac{11}{2}+m>0$であり，$n+\frac{11}{2}+m>n+\frac{11}{2}-m$ だから，　$n+\frac{11}{2}+m$　と　$n+\frac{11}{2}-m$ の組は

$\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{17}{2} \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{9}{2} \end{cases}$ または $\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{51}{2} \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{3}{2} \end{cases}$ または $\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{153}{2} \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{1}{2} \end{cases}$ の３つの場合が考えられる。

(ア)　$\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{17}{2} \cdots ① \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{9}{2} \cdots ② \end{cases}$ の場合，①+②より　$2n+11=13$　$2n=2$　$\therefore n=1$　これはを①に代入し

$m=2$

(イ)　$\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{51}{2} \cdots ① \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{3}{2} \cdots ② \end{cases}$ の場合，①+②より　$2n+11=27$　$2n=16$　$\therefore n=8$　これを①に代入し

$m=12$

(ウ)　$\begin{cases} n+\frac{11}{2}+m=\frac{153}{2} \cdots ① \\ n+\frac{11}{2}-m=\frac{1}{2} \cdots ② \end{cases}$ の場合，①+②より　$2n+11=77$　$2n=66$　$\therefore n=33$　これを①に代入し

$m=38$

(ア)～(ウ) より　$n=1, 8, 33$　　こうやってやってみると，意外に簡単だったかな。