チョイス（6訂版）118番

問題　n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ を求めよ。　（琉球大）

方針　(1) は基本中の基本ですから，これを落としたら合格は望めません。問題は (2) ですね。(1) を利用することは明らかですが，そのためにいくつものハードルが用意されています。とにかく (1) と関連づけるには，まず $\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ の自然対数をとらなければならないことに気づく必要があります。問題はそれからです。対数はとるが，実際は対数ではないのだから，それをどう解決するか。ポイントは昔やったことのある定理 $a^{\log_a x}=x$ というやつです。これを利用すれば何とかなりそうです。では，やってみましょう。

解答　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx=\int_0^1\left\{3\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right\}'\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx$

$$=\left[3\left(1+\frac{1}{3}x\right)\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right]_0^1-\int_0^1 3\left(1+\frac{1}{3}x\right)\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}x}dx$$

$$=3\times\frac{4}{3}\times\log\frac{4}{3}-0-\int_0^1 dx=4\log\frac{4}{3}-1$$

(2)　まず $\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ の自然対数をとると，

$$\log\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}=\frac{1}{n}\{\log(3n+1)+\log(3n+2)+\cdots+\log(3n+n)\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)+n\log 3n\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}+\log 3n$$

$\left(※\ \log(3n+k)=\log\left(1+\dfrac{k}{3n}\right)+\log 3n \text{ を利用していますね。}\right)$

これを利用すると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\log\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)+n\log 3n\right\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}+\log 3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}e^{\log 3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}\cdot 3n$$

$$=\lim_{n\to\infty}3e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}=3e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}=3e^{\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx}$$

$$=3e^{4\log\frac{4}{3}-1}=3e^{\log\frac{256}{81}-\log e}=3e^{\log\frac{256}{81e}}=3\times\frac{256}{81e}=\frac{256}{27e}$$

変形がかなりやばいですね。何度も $a^{\log_a x}=x$ を使っていることが分かりますか。ひとつは $e^{\log 3n}=3n$

チョイス（6訂版）118番

もう一つが　$e^{\log\frac{256}{81e}}=\dfrac{256}{81e}$　です。更に一つ引っかかるポイントがあるとすれば，それは

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}$　と　$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}$　が同じ意味だということです。この辺りに気づけるかどうかが，この問題の難しいところです。でも，この問題はなかなか巧妙な問題で，作問した大学の先生はとてもウィットに富んだ聡明な人だと思います。やや難しいと感じるかもしれませんが，皆さんにもその面白さが伝わると嬉しいです。Enjoy！