チョイス（６訂版）120番

問題　数列$\{a_n\}$を$a_n=\log n!=\log 1+\log 2+\cdots+\log n$ $(n=1,2,3,\cdots)$で定義する。

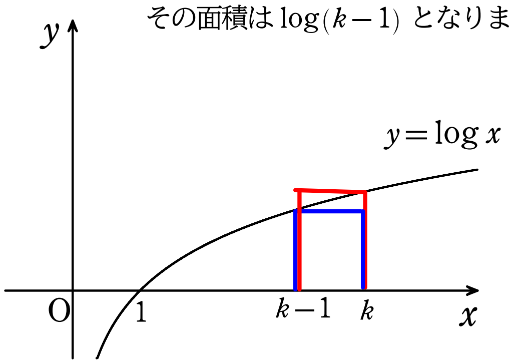
(1)　関数$y=\log x$ $(1\leqq x\leqq n)$のグラフを利用して，次の不等式を証明せよ。

$$a_{n-1}<\int_1^n \log x\,dx<a_n \qquad (n>2)$$

(2)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\log n}$を求めよ。　　（高知県立大）

方針　グラフを利用して不等式を証明する問題は，とてもポピュラーな問題で，4 Stepでもいくつかやりましたね。もし，馴染みがなかったら，4 Step の問題をもう一度復習してください。答案の出発点はみんな同じです。更に(2)ですが，察しの良い人は気づいたと思いますが，(1)で不等式を証明し，(2)で極限を求めると来たら，それはもう「はさみうちの定理（原理）」を使うしかありませんね。それじゃ，早速やってみましょう。

解答　(1)　下のグラフにおいて，青い長方形の面積は底辺が1，高さが$\log(k-1)$（kは2以上の自然数）だから
その面積は$\log(k-1)$となります。同様に，赤い長方形の面積は$\log k$となります。



このとき，グラフより

$\displaystyle\log(k-1)<\int_{k-1}^k \log x\,dx<\log k$ が成り立ちます。

この式の各辺に$k=2,3,4,\cdots,n$　を順次代入し辺々加えると

$$\log 1+\log 2+\cdots+\log(n-1)<\int_1^n \log x\,dx<\log 2+\log 3+\cdots+\log n$$

つまり　$\displaystyle\log(n-1)!<\int_1^n \log x\,dx<\log n!$　（※$\log 1=0$であることを忘れないでね。）

よって　$\displaystyle a_{n-1}<\int_1^n \log x\,dx<a_n$　$(n>2)$　が成り立ちます。

(2)　まず　$\displaystyle\int_1^n \log x\,dx$の値を求めると

$$\int_1^n \log x\,dx=\int_1^n (x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^n-\int_1^n x\cdot\frac{1}{x}dx=n\log n-(n-1)$$　となります。

このとき　$\displaystyle\int_1^n \log x\,dx<a_n$より　$n\log n-n+1<a_n$　よって　$\displaystyle\frac{n\log n-n+1}{n\log n}<\frac{a_n}{n\log n}$ …①

また　$\displaystyle a_{n-1}<\int_1^n \log x\,dx$より　$\displaystyle a_n<\int_1^{n+1}\log x\,dx$

つまり　$a_n<(n+1)\log(n+1)-(n+1-1)$より　$a_n<(n+1)\log(n+1)-n$

すなわち　$\displaystyle\frac{a_n}{n\log n}<\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n}$ …②　となります。　このとき　①,②より

$$\frac{n\log n-n+1}{n\log n}<\frac{a_n}{n\log n}<\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n}\ \cdots ③$$　が成り立ちます。

ところで，③について　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n-n+1}{n\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\log n}\right)=1\cdots ④$

チョイス（６訂版）120番

更に③ の右の式について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}\right\}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ は何でもありませんが，問題は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}$ です。感覚的には1だと分かりますが，「なぜ」と言われると少々返事に詰まってしまいます。実は次のようにすると簡単なんです。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=0$ ですから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ となりますね。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}\right\}=1\cdots$ ⑤ となります。

③，④，⑤より「はさみうちの定理」を利用すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\log n}=1$ となります。