チョイス（６訂版）122番

問題　e を自然対数の底とする。

(1)　すべての実数 x に対して不等式 $e^{x}+e^{-x} \geqq 2+x^{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{\cos t} dt \geqq \frac{5}{4}\pi$ が成り立つことを示せ。　（京都工芸繊維大）

方針　(1) は定石通りのやり方で出来ますね。ただ，２回微分をしなければなりません。問題は(2) 番です。勿論，ヒントは(1) にありますが，その結果だけでなく，答案を作っていく過程にヒントがあります。正直，この問題は突破口を見つけるのがやや難しいと思います。とはいえ，他の同様な問題に出会ったときに，どうやって解答の手がかりを得るか，それを考えるには，とても役立つと思います。

解答　(1)　$f(x)=e^{x}+e^{-x}-2-x^{2}$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ が成り立つので，$f(x)$ は偶関数である。よって，$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ であることを示せば良い。さて，$f'(x)=e^{x}-e^{-x}-2x$，更に　$f''(x)=e^{x}+e^{-x}-2$

ところで，$e^{x}>0$ かつ $e^{-x}>0$ だから，相加平均≧相乗平均より　$\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \geqq \sqrt{e^{x}e^{-x}}$　$\because\ e^{x}+e^{-x} \geqq 2$

よって $f''(x) \geqq 0$ となり，$f'(x)$ は単調増加である。更に $f'(0)=1-1=0$ より，$x \geqq 0$ で $f'(x) \geqq 0$ となり，$f(x)$ は単調増加となる。更に，$f(0)=1+1-2-0=0$ より，$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ がなりたち，これと $f(x)$ が偶関数であることより，全ての実数 x に対して，与式が成り立つと言える。

(2)　(1) より，$x \geqq 0$ において　$e^{x}+e^{-x} \geqq 2+x^{2} \cdots$①　が成り立つ。更に，$x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ より，

$e^{x}-e^{-x} \geqq 2x \cdots$②　が成り立つ。　①，②を辺々足して　$2e^{x} \geqq x^{2}+2x+2$　つまり　$e^{x} \geqq \dfrac{1}{2}x^{2}+x+1 \cdots$③ が成り立つと言える。 また $x \leqq 0$ のとき，$x=-s$ とおくと，$s \geqq 0$ となり，そもそも $f(x)$ 自体，偶関数だから ①式は成り立ち，$x=-s$ とおいた式 $e^{-s}+e^{s} \geqq 2+s^{2}$　つまり　$e^{s}+e^{-s} \geqq 2+s^{2}\ (s \geqq 0)$ が成り立つ。

このとき，上の証明と全く同じ証明により，$e^{s}-e^{-s} \geqq 2s$ も成り立つから，

$e^{s}+e^{-s} \geqq 2+s^{2}$ と $e^{s}-e^{-s} \geqq 2s$ を辺々足しと，$2e^{s} \geqq s^{2}+2s+2$　つまり，$e^{s} \geqq \dfrac{1}{2}s^{2}+s+1$ が成り立ち，結局 $x \geqq 0$ のときも，$x \leqq 0$ のときも，③式は成り立つと言える。

このとき，③式に $x=\cos t$ を代入すると　$e^{\cos t} \geqq \dfrac{1}{2}\cos^{2} t+\cos t+1$

$$\int_{0}^{\pi} e^{\cos t} dt \geqq \int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^{2} t+\cos t+1\right)dt=\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{1}{4}(1+\cos 2t)+\cos t+1\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\sin 2t+\sin t+t\right]_{0}^{\pi}=\frac{5}{4}\pi$$

すなわち　$\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{\cos t} dt \geqq \frac{5}{4}\pi$ が成り立つと言える。