メジアン（新課程）124番

問題　n を2以上20以下の整数, k を1以上 $n-1$ 以下の整数とする。${}_{n+2}C_{k+1}=2({}_nC_{k-1}+{}_nC_{k+1})$ が成り立つような整数の組 $(n\,,k)$ を求めよ。　（23 一橋大）

方針　${}_nC_r=\dfrac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}$ を使って与式を変形するのがスタートですね。

解答　与式より　$\dfrac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)!}=2\left\{\dfrac{n\,!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\dfrac{n\,!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\right\}$

この両辺に $\dfrac{(k+1)!\,(n-k+1)!}{n\,!}$ をかけて　$(n+2)(n+1)=2\{k(k+1)+(n-k)(n-k+1)\}$

展開して整理すると　$n^2+3n+2=2k^2+2k+2n^2-4kn+2k^2+2n-2k$

$4kn-4k^2=n^2-n-2$　　$4k(n-k)=(n+1)(n-2)$ … ①

左辺は4の倍数だから, $n+1$ が4の倍数の場合と $n-2$ が4の場合に分けて考える。

(ア)　$n+1$ が4の倍数の場合

$2\leqq n\leqq 20$ より, $3\leqq n+1\leqq 21$　$n+1$ が4の倍数だから　$n+1=4\,,8\,,12\,,16\,,20$

つまり $n=3\,,7\,,11\,,15\,,19$ の場合がある。

- $n=3$ のとき　①より　$4k(3-k)=4$　$3k-k^2=1$ より　$k^2-3k+1=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。
- $n=7$ のとき　①より　$4k(7-k)=40$　$7k-k^2=10$　$k^2-7k+10=0$ より　$k=2\,,5$ これは条件を満たす。
- $n=11$ のとき　①より　$4k(11-k)=12\times 9$　$11k-k^2=27$　$k^2-11k+27=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。
- $n=15$ のとき　①より　$4k(15-k)=16\times 13$　$15k-k^2=52$　$k^2-15k+52=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。
- $n=19$ のとき　①より　$4k(19-k)=20\times 17$　$19k-k^2=85$　$k^2-19k+85=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。

$(n\,,k)=(7\,,2),(7\,,5)$

(イ)　$n-2$ が4の倍数の場合

$2\leqq n\leqq 20$ より, $0\leqq n-2\leqq 18$　$n-2$ が4の倍数だから　$n-2=0\,,4\,,8\,,12\,,16$

つまり $n=2\,,6\,,10\,,14\,,18$ の場合がある。

- $n=2$ のとき　①より $k(2-k)=0$ より　$k=0\,,2$　k は1以上 $n-1$ 以下の整数だから不適。
- $n=6$ のとき　①より $4k(6-k)=7\times 4$　$6k-k^2=7$　$k^2-6k+7=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。
- $n=10$ のとき　①より $4k(10-k)=11\times 8$　$10k-k^2=22$　$k^2-10k+22=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。
- $n=14$ のとき　①より $4k(14-k)=15\times 12$　$14k-k^2=45$　$k^2-14k+45=0$　$k=5, 9$　1以上 $n-1$ 以下の整数であることを満たし適す。
- $n=18$ のとき　①より $4k(18-k)=19\times 16$　$18k-k^2=76$　$k^2-18k+76=0$　これを満たす整数 k は存在せず不適。

(ア), (イ) より　$(n\,,k)=(7\,,2),(7\,,5),(14\,,5),(14\,,9)$