チョイス（６訂版）128番

問題　nを自然数とし，$I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$ とおく。

(1)　I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $\dfrac{e}{n+2}<I_n<\dfrac{e}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(nI_n-e)$ を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(大分医科大)

方針　「さすが医科大学の問題だ」と思わせる問題です。(1) からの流れをしっかり捉えて，それを後の問題の解答に利用することを強く意識しなければなりません。しかし，一度手がかりに気づくと，まるでクイズのような面白さが感じられる問題です。楽しみながら取り組むことが大切ですね。

解答　(1)　勿論，手立ては部分積分ですね。

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)'dx=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=e-(n+1)I_n$$

(2)　$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx>0$ だから，(1) より　$I_{n+1}=e-(n+1)I_n>0$　　$(n+1)I_n<e$

$\therefore$　$I_n<\dfrac{e}{n+1}$ … ①　　また，$0\leqq x\leqq 1$ より $0\leqq x^{n+1}e^x\leqq x^n e^x$　これを定積分し

$0<\int_0^1 x^{n+1}e^x dx<\int_0^1 x^n e^x dx$　$I_{n+1}<I_n$　よって $e-(n+1)I_n<I_n$ より　$e<(n+2)I_n$　$\therefore\ \dfrac{e}{n+2}<I_n$ … ②

①，②より　$\dfrac{e}{n+2}<I_n<\dfrac{e}{n+1}$

(3)　これは②の結果を使えば簡単ですね。　$\dfrac{e}{n+2}<I_n<\dfrac{e}{n+1}$ より　$\dfrac{en}{n+2}<nI_n<\dfrac{en}{n+1}$

$\dfrac{e}{1+\frac{2}{n}}<nI_n<\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}$　　このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{e}{1+\frac{2}{n}}=e$　また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}=e$　よって，はさみうちの定理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n=e$ となる。

(4)　２匹目のドジョウを狙って　$\dfrac{en}{n+2}<nI_n<\dfrac{en}{n+1}$ を利用しようと思いますが，実はうまくいきません。

$\dfrac{en}{n+2}<nI_n<\dfrac{en}{n+1}$ より　$\dfrac{e}{1+\frac{2}{n}}<nI_n<\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}$　　$\dfrac{e}{1+\frac{2}{n}}-e<nI_n-e<\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}-e$

$\dfrac{en}{1+\frac{2}{n}}-en<n(nI_n-e)<\dfrac{en}{1+\frac{1}{n}}-en$　　$n\to\infty$のとき，左右の極限は $\infty-\infty$となり不定形になりますね。ですから，このやり方はダメということです。そこで，もう一度手がかりがないか最初から検討してみます。

$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$　この式が使えそうですから，ここから考えてみましょう。$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ より

$I_{n+1}=-(nI_n-e)-I_n$　　つまり，　$nI_n-e=-I_{n+1}-I_n$となりますから，$n(nI_n-e)=-nI_{n+1}-nI_n$となりま

チョイス（６訂版）128番

す。ところで, $\lim_{n\to\infty} nI_n = e$　また, $\lim_{n\to\infty} nI_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(n+1)I_{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1)I_{n+1}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right) = e\cdot 1 = e$

ですから, $n(nI_n - e) = -nI_{n+1} - nI_n$ より　$\lim_{n\to\infty} n(nI_n - e) = -2e$ となります。

　どうでしょう。分かりましたか。どこから手がかりを得るかが, ちょっと大変ですね。でも, 行き詰ったら考え方を切り替えて, 再度, 考え直すことが出来れは , 何とか活路は開けます。