チョイス（６訂版）140番

問題　曲線C：$y=-\log x$　$(x>0)$ 上の点 $P_0(1,0)$ における接線と y 軸との交点を Q_1 とする。Q_1 から x 軸に平行に引いた直線と C との交点を P_1 とする。P_1 における C の接線と y 軸との交点を Q_2 とする。以下同様に, P_{n-1}，Q_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を定めるとき,

(1)　Q_n の y 座標 y_n を n で表せ。

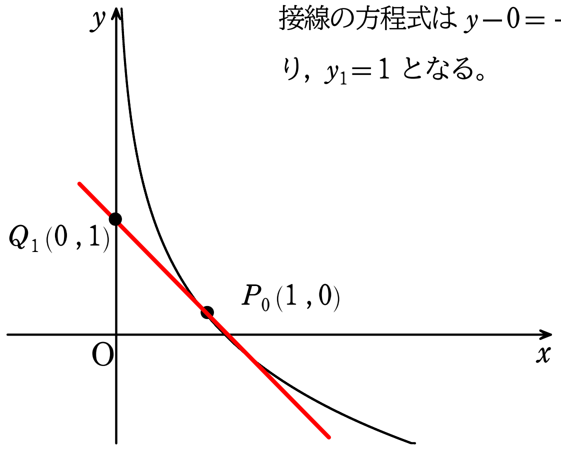
(2)　２つの直線 $P_{n-1}Q_n$，P_nQ_n と C で囲まれる図形の面積 S_n を n で表せ。

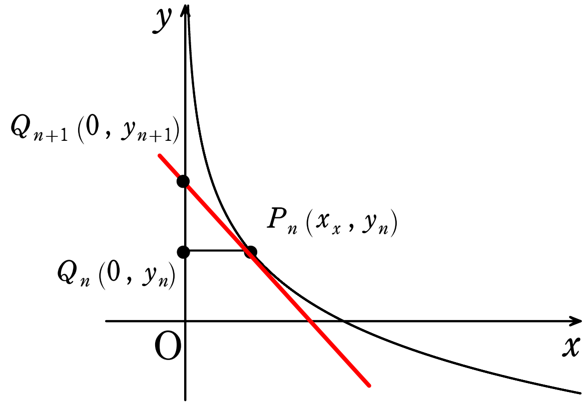
(3)　$S=\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。　　　　（富山県立大）

方針　(1) については y_n と y_{n+1} の間に成り立つ漸化式を作ることがポイントですね。(2) については, とにかく正確に計算することが大切です。(3) については, この手の問題によく見られるように, おそらく無限等比級数になると思われます。(2) で求めた S_n を無限等比数列の一般項の形に見えるように変形することが大切です。収束条件について確認すれば, 簡単に求まると思われます。

解答　(1)

$y=f(x)=-\log x$ とおくと, $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$　　よって, $f'(1)=-1$ より, 点 P_0 における接線の方程式は $y-0=-1\times(x-1)$　$\therefore\ y=-x+1$　　よって Q_1 の座標は $Q_1(0,1)$ となり, $y_1=1$ となる。

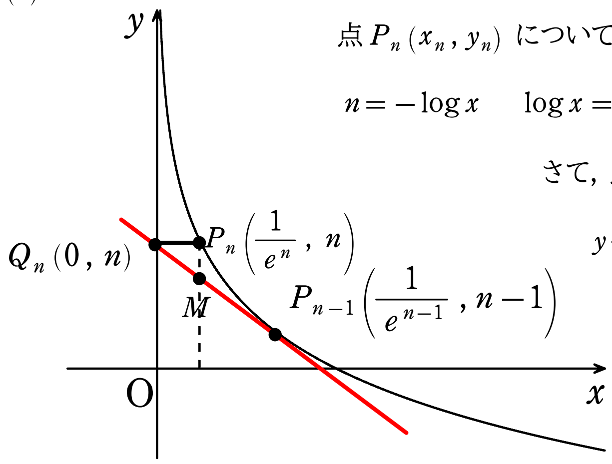




さて, 点 $P_n(x_n,y_n)$ における接線の方程式は　$y-y_n=-\dfrac{1}{x_n}(x-x_n)$ だから, x に 0 を代入すると　$y-y_n=1$

つまり $y_{n+1}=y_n+1$ となり, 数列 $\{y_n\}$ は, 初項が $y_1=1$, 公差が 1 の等差数列だから $y_n=n$ となる。

(2)



点 $P_n(x_n,y_n)$ について, $y_n=n$ だから　$y=-\log x$ に $y=n$ を代入すると

$n=-\log x$　　$\log x=-n$ より $x=e^{-n}=\dfrac{1}{e^n}$ となる。

さて, 点 P_{n-1} における接線の方程式は

$y-(n-1)=-e^{n-1}\left(x-\dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$　だから, 点 P_n から

x 軸に降ろした垂線と点 P_{n-1} における接線との交点の y 座標は

$y-(n-1)=-e^{n-1}\left(x-\dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$ に $x=\dfrac{1}{e^n}$ を代入し

$y-n+1=-e^{n-1}\left(\dfrac{1}{e^n}-\dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$

チョイス（６訂版）140番

$y-n+1=-\dfrac{1}{e}+1$　よって　$y=n-\dfrac{1}{e}$　このとき　$\triangle Q_n MP_n$の面積は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{e^n}\times\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{2e^{n+1}}$ となる。

一方，$y=-\log x$ のグラフと線分 MP_{n-1} , MP_n で囲まれた面積は

$$\int_{\frac{1}{e^n}}^{\frac{1}{e^{n-1}}}(-\log x+e^{n-1}x-n)dx=-\int_{\frac{1}{e^n}}^{\frac{1}{e^{n-1}}}(x)'\log x\,dx+\left[\frac{e^{n-1}}{2}x^2-nx\right]_{\frac{1}{e^n}}^{\frac{1}{e^{n-1}}}]$$

$$=-\Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{e^n}}^{\frac{1}{e^{n-1}}}+\int_{\frac{1}{e^n}}^{\frac{1}{e^{n-1}}}dx+\frac{e^{n-1}}{2}\times\left(\frac{1}{e^{n-1}}\right)^2-\frac{n}{e^{n-1}}-\frac{e^{n-1}}{2}\times\left(\frac{1}{e^n}\right)^2+\frac{n}{e^n}$$

$$=-\left\{\frac{1}{e^{n-1}}(-n+1)-\frac{1}{e^n}(-n)\right\}+\frac{1}{e^{n-1}}-\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2e^{n-1}}-\frac{n}{e^{n-1}}-\frac{1}{2e^{-n+1}}+\frac{n}{e^n}$$

$$=\frac{n}{e^{n-1}}-\frac{1}{e^{n-1}}-\frac{n}{e^n}+\frac{1}{e^{n-1}}-\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2e^{n-1}}-\frac{n}{e^{n-1}}-\frac{1}{2e^{n+1}}+\frac{n}{e^n}=-\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2e^{n-1}}-\frac{1}{2e^{n+1}}$$

よって $S_n=\dfrac{1}{2e^{n+1}}-\dfrac{1}{e^n}+\dfrac{1}{2e^{n-1}}-\dfrac{1}{2e^{n+1}}=\dfrac{-1}{e^n}+\dfrac{1}{2e^{n-1}}=\dfrac{e-2}{2e^n}=\dfrac{e-2}{2e}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$

(3)　$S_n=\dfrac{e-2}{2e}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$より　無限級数 $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項が $\dfrac{e-2}{2e}$, 公比 $\dfrac{1}{e}$ の無限等比級数で収束条件を満たすので　$S=\dfrac{\frac{e-2}{2e}}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{e-2}{2e-2}=\dfrac{e-2}{2(e-1)}$ となる。