メジアン（新課程）147

問題 (1)　２個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積が６の倍数になる確率を求めよ。

(2)　３個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積が６の倍数になる確率を求めよ。

(3)　n 個のさいころ ($n=2$，3，……) を同時に投げるとき，出る目の積が６の倍数になる確率を求めよ。

（14 岡山理科大）

方針　(1) は, 積が６となるときの場合分けさえ出来れば, 求められますね。最終的には (3) を解くことが目的なのですが, その前に (2) を解いて, 一般化する方法を見つけねばなりません。簡単そうで難しい問題だと思います。じっくり取り組みましょう。

解答

(1)　積が６の倍数になるのは, 重複しないことに気を付けると, 次の２つのケースがあります。

(ア)　２数とも６の場合

勿論, これは１通りしかありません。

(イ)　一方が６で, 他方が６以外の場合

A , B２つのサイコロを考えると Aが6の場合が5通り, Bが６の場合も5通りずつ, 合計10通りですね。

(ウ)　一方が２または４で, 他方が３の場合

Aが３の場合, Bは２または4ですから, 2通り。Bが３の場合も2通りあるので, 合計4通りある。

(ア) ～ (ウ) から積が６の倍数となるのは, 15通りあり, 2個のサイコロの目の出方は36通りあるので, 求める確率は

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

(2)　3個のサイコロの場合には, ある程度, 一般化出来ることを考えつつ, なお (1) との関係も意識して考える必要があります。まず, 積が６の倍数となるのを次の２つに分けて考えましょう。

(ア)　少なくとも１つ６の目を含む場合

「少なくとも１つ６の目を含む場合」の余事象は「１つも６を含まない場合」で, それは $5^3=125$ （通り）ある。ところが目の出方は全部で $6^3=216$（通り）あるから, 「少なくとも１つ６の目を含む場合」は $216-125=91$（通り）である。

(イ)　１個も６を含まない場合

全ての目が５以下の中で考えることになるが, 目の出方については, 3の目が１個または２個の場合がある。

①　３の目が1個の場合は, 例えばAが３の場合

（ｉ）ＢとＣの一方のみが２または４の場合

Ｂが２または４なら, Cは1, 5だから, $2\times2=4$（通り）

Ｃが２または４の場合も同数の4通り。よってＢとＣの一方のみが２または４となるのは 8通りある。

（ii）ＢとＣが共に２または４の場合は　$2\times2=4$（通り）

（ｉ）と（ii）の合計で 12通りあるが, Bが３の場合や, Cが３の場合も同数あるので, 1個が３の場合は全部で36通りある。

②　２個が３の場合, 例えばＡとＢが３の場合は, Cは２または４なので２通りあり, ＢとＣが３の場合や, ＣとＡが３の場合も同数あるので , ２個が３の場合は合計６通りある。

①, ②より, 少なくとも１個が２または４で, かつ少なくとも１個が３の場合は $36+6=42$（通り）ある。

(ア) , (イ) より３個のサイコロの目の積が６の倍数となるのは, $91+42=133$（通り）ある。

メジアン（新課程）147

よって，求める確率は $\dfrac{133}{6^3}=\dfrac{133}{216}$ となる。

(3)　(2)で考えたように，少なくとも1個６を含んでいる場合と，６を含まない場合がある。

(ア)　少なくとも６を１個含む場合

余事象は5^n（通り）あるので，少なくとも６を１個含む場合は　6^n-5^n（通り）ある。

(イ)　６を含まない場合

６を含まない場合は，全て５以下の目の中で考えることになる。全て５以下の目が出る場合の全体を全体集合Ｕとし，その部分集合で偶数の目が出る場合の集合をＡ，3の目が出る場合の集合をＢとすると，積が６の倍数となるのは，$n(A\cap B)$（通り）ある。その余事象の要素の数は，$n(\overline{A}\cup\overline{B})$であるが，$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B})$によって求めると，$\overline{A}$は偶数がでない場合であるから，全て奇数ということになる。その個数は3^n（通り）となる。また，$\overline{B}$は3が出ない場合であるから，全ての目が１，２，４，5のいずれかであるから，その個数は4^n（通り）となる。更に、$\overline{A}\cap\overline{B}$は，偶数も３も出ないときであるから，全ての目が１あるいは５であるから，その個数は2^n（通り）となる。

従って，６を含まずに積が６の倍数となるのは

$$n(A\cap B)=n(\overline{U})-n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(U)-\{n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B})\}$$

$$=5^n-(3^n+4^n-2^n)$$ （通り）ある。

(ア)，(イ)より 求める確率は $\dfrac{(6^n-5^n)+5^n-(3^n+4^n-2^n)}{6^n}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となる。