2変数とΣが絡んだ不等式と微分（応用編 ①）

「変数が2個もあり、しかも不等式に中にΣが含まれているなんて。」　そう思うのも無理はありません。でも、難しいと思える問題こそ、原理原則に従って解く姿勢が大切になります。

問題

(1)　全ての正の数 x, y に対して不等式　　$x(\log x - \log y) \geqq x - y$　　が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2)　正の数 $x_1, \cdots, x_n$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき、不等式　$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$　が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのは　$x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。

解答

(1) x, y を共に変数扱いしては微分するときに困りますから、 y を正の定数 a に置き換え $f(x) = x(\log x - \log a) - x + a$ として、 $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを証明することにしましょう。まずは、両辺を x で微分して見ます。

$f'(x) = (\log x - \log a) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \log x - \log a$　$f'(x) = 0$ とおいて解くと $x = a$ となり、増減表は以下のようになります。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘	0	↗

つまり、 $x > 0$ における $f(x)$ の最小値は 0 となり、 $f(x) \geqq 0$ が言え、与式は成り立つと言えます。勿論、等号が成立するのは、 $f(x) = 0$ のとき、つまり $x = a$　すなわち $x = y$ のときに限ります。

(2)　問題は(1) で証明した $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ をいかに利用するかですが、 $\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$ の左辺のΣの中身に着目し、 x に x_i を y に $\frac{1}{n}$ を代入してみます。よって $x_i\left(\log x_i - \log \frac{1}{n}\right) \geqq x_i - \frac{1}{n}$ より

$x_i \log x_i \geqq x_i + x_i \log \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$　　この両辺に $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ を辺々代入し加えると、

$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$　$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i + \log \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \times n$　　ところで $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ だから、

$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq 1 + \log \frac{1}{n} - 1$　つまり　$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$　が成り立つ。ところで　$x_i \log x_i \geqq x_i + x_i \log \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ の型の n 個の不等式を加えるとき、等号が成立するのは、 n 個全ての不等式の等号が成立するときで、そのとき、(1) より $x = a$ つまり、 $x = y$ のときで、 $y = \frac{1}{n}$ だから、等号が成り立つのは　$x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ の場合に限ると言える。