チョイス（6訂版）201番

$\boxed{\text{問題}}$ 曲線$C:(x^2+y^2)(\sqrt{3}x^2+y^2)=(x+y)^2$，$(x>0,\ y>0)$について

(1) 曲線Cを極方程式$r^2=f(\theta)$の形で表せ。

(2) $t=\tan\theta$とおくことにより，$f(\theta)$の最大値とそれを与える$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

$\boxed{\text{方針}}$ まずは$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（θは第1象限の角）を代入することからスタートですね。

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 与式に$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（θは第1象限の角）を代入し

$$(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)(\sqrt{3}r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)=(r\cos\theta+r\sin\theta)^2$$

$$r^2\times r^2(\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

両辺をr^2で割って　$r^2(\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\cos\theta+\sin\theta)^2$

$$r^2=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

(2) $r^2=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta}$の右辺の分母分子を$\cos^2\theta$で約分して

$r^2=\dfrac{(1+\tan\theta)^2}{\sqrt{3}+\tan^2\theta}$　$\therefore$　$f(\theta)=\dfrac{(1+\tan\theta)^2}{\sqrt{3}+\tan^2\theta}$　つまり　$f(\theta)=\dfrac{(1+t)^2}{\sqrt{3}+t^2}$　$(t>0)$

ここで　$g(t)=\dfrac{(1+t)^2}{\sqrt{3}+t^2}$　$(t>0)$　とおいて，両辺をtで微分すると

$g'(t)=\dfrac{2(1+t)(\sqrt{3}+t^2)-(1+t)^2\times 2t}{(\sqrt{3}+t^2)^2}$　　$g'(t)=0$とおいて解くと

$2(1+t)(\sqrt{3}+t^2-t-t^2)=0$　　$t>0$より　　$\sqrt{3}-t=0$　　$t=\sqrt{3}$

このとき増減表は次の通り

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	/	$+$	0	$-$
$g(t)$	/	$\nearrow$	$\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}+3}$	$\searrow$

よって求める最大値は　$\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}+3}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$　このとき$t=\tan\theta=\sqrt{3}$を$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$で解いて　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$