チョイス（6訂版）218番

問題　Nを自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ を満たすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。但し，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

方針　(1) については，210番や217番などでも出てきた定番の式ですね。(2) は (1) の式の実部を取り出したものだし，(3) は２倍角の公式を使えば，(2) と同じようにできます。

解答　(1)　$z^N=1$ より，$1-z^N=0$　つまり，$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1})=0$ …①　よって，$z=1$ または $1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=0$

(ア)　$z=1$ のとき　$1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=N$

(イ)　$z\fallingdotseq 1$ のとき　①より $1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=0$

(2)　$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1})=0$ について

$z=1$ のとき

$z^k=1$ ($k=0,1,2,\cdots,N-1$) より，　$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=1$　つまり　$\cos k\theta+i\sin k\theta=1$　両辺の実部同士，虚部同士比較し $\cos k\theta=1$，$\sin k\theta=0$

このとき，　$1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=N$ の実部だけに目を付けて，$S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta=N$

$z\fallingdotseq 1$ のとき

$1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=0$ の実部だけに目をつけて，$S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta=0$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$ について、$z=1$ のとき，つまり (2) より，

$\cos k\theta=1$ ($k=0,1,2,\cdots,N-1$) だから，$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta=N$

また，$z=-1$ のとき，$z^k=-1$ ($k=0,1,2,\cdots,N-1$) より，　$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=(-1)^k$　つまり

$\cos k\theta+i\sin k\theta=(-1)^k$　両辺の実部同士，虚部同士比較し $\cos k\theta=(-1)^k$，$\sin k\theta=0$

このとき，$\cos^2 k\theta=(-1)^{2k}=1$ より　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta=N$

$z\fallingdotseq\pm1$ のとき，$z^N=1$より，$z^{2N}=1$　つまり，$(1-z^2)\{1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2(N-1)}\}=0$

$z\fallingdotseq\pm1$ より $1-z^2\fallingdotseq 0$　よって，$1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2(N-1)}=0$ … ②

②式の実部のみに目を付けると　$1+\cos2\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cdots+\cos2(N-1)=0$

つまり　$\cos2\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cdots+\cos2(N-1)=-1$　このとき

$$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta=1+\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{1+\cos4\theta}{2}+\frac{1+\cos6\theta}{2}+\cdots$$

$$+\frac{1+\cos2(N-1)}{2}=1+\frac{1}{2}(N-1)+\frac{1}{2}\{\cos2\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cdots+\cos2(N-1)\theta\}$$

$$=1+\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}N$$　となる。