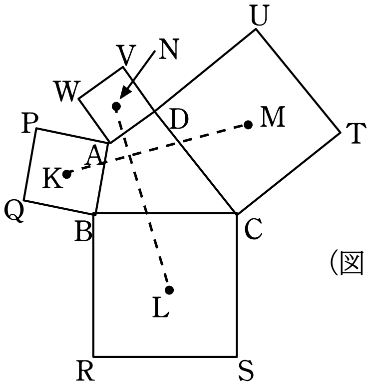
チョイス　224番

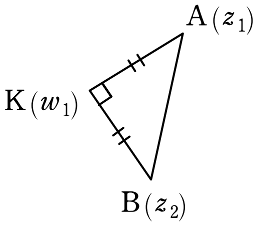
下図のように，複素数平面上に四角形ABCDがあり，４点A，B，C，Dを表す複素数をそれぞれ，z_1，z_2，z_3，z_4 とする。各辺を一辺とする４つの正方形BAPQ，CBRS，DCTU，ADVWを四角形ABCDの外周に作り，正方形BAPQ，CBRS，DCTU，ADVWの中心をそれぞれK，L，M，Nとおく。

(1) 点Kを表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ。　　(2) KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ。

(3) 線分KMと線分LNの中点が一致するのは四角形ABCDがどのような図形のときか。



（図１）



（解答）(1) 右上の図より，点Aを点Bの周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して，ABの長さを $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものが点Kだから，

$$w_1-z_2=(z_1-z_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ となり，

$$w_1=(z_1-z_2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+z_2=\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{z_1-z_2}{2}i$$ と表せる。

(2) 点L，点M，点Nを表す複素数をそれぞれ w_2，w_3，w_4 とすると，(1)の式において，$w_1\to w_2\to w_3\to w_4$，$z_1\to z_2\to z_3\to z_4$ と順に変化させていけば良いから，w_2，w_3，w_4 はそれぞれ

$$w_2=\frac{z_2+z_3}{2}+\frac{z_2-z_3}{2}i,\quad w_3=\frac{z_3+z_4}{2}+\frac{z_3-z_4}{2}i,\quad w_4=\frac{z_4+z_1}{2}+\frac{z_4-z_1}{2}i$$ と表せる。

このとき，KM＝LN，KM⊥LNとなることを示すには，w_1-w_3 に i または $-i$ をかければ w_2-w_4 となることを暗に意味していると推測できる。ところで，w_1-w_3 と w_2-w_4 はそれぞれ

$$w_1-w_3=\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{z_1-z_2}{2}i-\left(\frac{z_3+z_4}{2}+\frac{z_3-z_4}{2}i\right)=\frac{z_1+z_2-z_3-z_4}{2}+\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{2}i$$

$$w_2-w_4=\frac{z_2+z_3}{2}+\frac{z_2-z_3}{2}i-\left(\frac{z_4+z_1}{2}+\frac{z_4-z_1}{2}i\right)=\frac{-z_1+z_2+z_3-z_4}{2}+\frac{z_1+z_2-z_3-z_4}{2}i$$ となり，

この２つを子細に見ると，$w_2-w_4=(w_1-w_3)i$ となっていることが分かる。よって，

$|w_2-w_4|=|(w_1-w_3)i|=|w_1-w_3|$ より KM＝LN が成り立ち，また，$w_2-w_4=(w_1-w_3)i$ より KM⊥LN が成り立つと言える。

(3) 線分KMの中点を表す複素数は，$\dfrac{w_1+w_3}{2}=\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}+\dfrac{z_1-z_2+z_3-z_4}{4}i$

また，線分LNの中点を表す複素数は，$\dfrac{w_3+w_4}{2}=\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}+\dfrac{-z_1+z_2-z_3+z_4}{4}i$ となる。

この２つが一致するので，$z_1-z_2+z_3-z_4=-z_1+z_2-z_3+z_4$　すなわち $\dfrac{z_1+z_3}{2}=\dfrac{z_2+z_4}{2}$ となる。

つまり，四角形ABCDの対角線ACとBDはそれぞれの中点で交わるので，四角形ABCDは平行四辺形と言える。