チョイス　225番

複素数平面において, 三角形の頂点O, A, Bを表す複素数をそれぞれ 0, α, βとするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分OAの垂直二等分線上の点を表す複素数 z は, $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$を満たすことを示せ。

(2) △OABの外心を表す複素数をα, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を用いて表せ。

(3) △OABの外心を表す複素数が $\alpha+\beta$ となるときの $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ。

（解答）(1) 線分の垂直二等分線上は, その線分の両端からの距離が等しい点の集合であるから, 複素数 z の表す点をPとすると, OP=APより $|z-0|=|z-\alpha|$ が成り立つ。この両辺を2乗すると, $z\overline{z}=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$　両辺を展開し整理すると, $z\overline{z}=z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$　つまり $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ となる。

(2) △OABの外心は線分OAの二等分線上にも, 線分OBの二等分線上にも同時に存在するので,
$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ …①　かつ $\overline{\beta}z+\beta\overline{z}-\beta\overline{\beta}=0$ …② を満たす。これら２式から $\overline{z}$ を消去し, それを z について解けば良いから, ①×β−②×αより, $(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})z=\alpha\overline{\alpha}\beta-\alpha\beta\overline{\beta}$　よって $z=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}\beta-\alpha\beta\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}=\dfrac{|\alpha|^2\beta-\alpha|\beta|^2}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}$ となる。

(3) (2)において, $z=\alpha+\beta$ とすれば良いから　$\alpha+\beta=\dfrac{|\alpha|^2\beta-\alpha|\beta|^2}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}$　両辺に $\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}$ をかけて

$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})=|\alpha|^2\beta-\alpha|\beta|^2$　$|\alpha|^2\beta-\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2-\alpha|\beta|^2=|\alpha|^2\beta-\alpha|\beta|^2$　$-\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2=0$

つまり $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ …① となる。　ところでOP=APより　$\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})-\alpha\overline{\alpha}=0$　これを展開し整理すると　$|\alpha|^2+\overline{\alpha}\beta+|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}-|\alpha|^2=0$　$\overline{\alpha}\beta-|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}=0$　この両辺を $|\alpha|^2$ で割ると $\dfrac{\beta}{\alpha}-1+\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=0$

つまり　$\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=-\dfrac{\beta}{\alpha}+1$ …② となる。②を①に代入し, $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}-1$　$\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

これを解いて　$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となる。