チョイス　226番

相異なる４つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して $w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ とおく。このとき, 以下を証明せよ。

(1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である。

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるとき, w は実数である。

(3) z_1, z_2, z_3 が単位円上にあり, w が実数であれば, z_4 は単位円上にある。

（解答）(1) 複素数 z が単位円上にある。$\Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow z\overline{z}=1$　$\therefore \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

よって　複素数 z が単位円上にある。$\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$　となる。

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるから, $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1},\ \overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2},\ \overline{z_3}=\dfrac{1}{z_3},\ \overline{z_4}=\dfrac{1}{z_4}$

このとき $\overline{w}=\dfrac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}$　この分母分子に $z_1z_2z_3z_4$ をかけて

$\overline{w}=\dfrac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=w$　よって $\overline{w}=w$ より, w は実数である。

(3) w が実数 だから $\overline{w}=w$ より $\dfrac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\cdots$ ①

z_1, z_2, z_3 が単位円上にあるので, $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1},\ \overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2},\ \overline{z_3}=\dfrac{1}{z_3}\cdots$②

②を①に代入し　$\dfrac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\overline{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\overline{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$　左辺の分母分子に $z_1z_2z_3z_4$ をかけて

$\dfrac{(z_3-z_1)(z_4-z_2z_4\overline{z_4})}{(z_4-z_1z_4\overline{z_4})(z_3-z_2)}=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$　これを整理して $\dfrac{z_2\overline{z_4}-1}{z_1\overline{z_4}-1}=\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$　両辺の分母を払うと

$(z_2\overline{z_4}-1)(z_1-z_4)=(z_2-z_4)(z_1\overline{z_4}-1)$　展開すると $z_1z_2\overline{z_4}-z_2|z_4|^2-z_1+z_4=z_1z_2\overline{z_4}-z_2-z_1|z_4|^2+z_4$

$-z_2|z_4|^2-z_1=-z_2-z_1|z_4|^2$　$(z_1-z_2)|z_4|^2=z_1-z_2\cdots$③　$z_1\neq z_2$ だから③の両辺を z_1-z_2 で割ると

$|z_4|^2=1$　つまり $|z_4|=1$ となり, z_4 は単位円上にあると言える。