チョイス（6訂版）230番

問題 複素数平面上で　$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{4}z_0$　　$z_2=-\dfrac{1}{z_0}$　を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 とする。

(1)　z_0 を極形式で表せ。

(2)　z_2 を極形式で表せ。

(3)　原点 O，P_0，P_1，P_2 の４点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。　　（岡山大）

解答

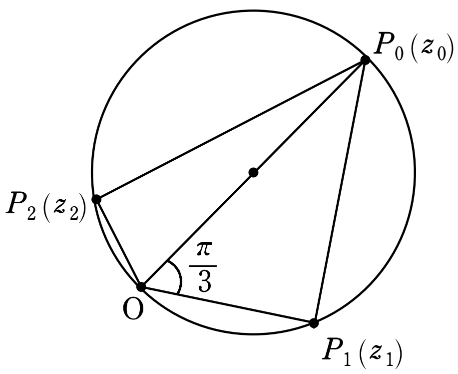
(1)　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$z_2=-\dfrac{1}{z_0}=-\dfrac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}=-\dfrac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\dfrac{1}{2}(-\cos\theta+i\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\{\cos(\theta-\pi)+i\sin(\theta-\pi)\}$

(3)



$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_1=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$OP_0:OP_1=2:1$，$\angle P_1OP_0=\dfrac{\pi}{3}$ だから，

原点 O，P_0，P_1，P_2 の４点は，OP_2 を直径とする円周上にある。

3点 O，P_0，P_1 が同一円周上にあることは明らかだが, 点 P_2 もこの円周上にあるので, $\angle OP_2P_0=\dfrac{\pi}{2}$ となる。つまり, $\dfrac{z_0-z_2}{0-z_2}$，すなわち

$\dfrac{z_0-\left(-\dfrac{1}{z_0}\right)}{0-\left(-\dfrac{1}{z_0}\right)}=\dfrac{z_0+\dfrac{1}{z_0}}{\dfrac{1}{z_0}}=z_0{}^2+1$ は準虚数となる。

よって　$z_0{}^2+1=-\overline{z_0{}^2+1}$　より　$z_0{}^2+1=(\overline{z_0})^2+1$　　つまり　$\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^2=-\{2(\cos\theta-i\sin\theta)\}^2-1$

展開し整理すると　$4\cos2\theta+i4\cos2\theta+1=-4\cos2\theta+i4\cos2\theta-1$　　$8\cos2\theta=-2$　　$\cos2\theta=-\dfrac{1}{4}$

$2\cos^2-1=-\dfrac{1}{4}$　　$\cos^2\theta=\dfrac{3}{8}$　　$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入し,　$\sin^2\theta+\dfrac{3}{8}=1$　　$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　このとき　$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$　となる。