# チョイス　238番

$z$ は $|z-2|\leqq 1$ を満たす複素数。 $a$ は $0\leqq a\leqq 2$ を満たす実数とする。更に $w=iaz$ とする。但し、 $i$ は虚数単位である。

(1) 複素数平面において $w$ の存在範囲を図示せよ。

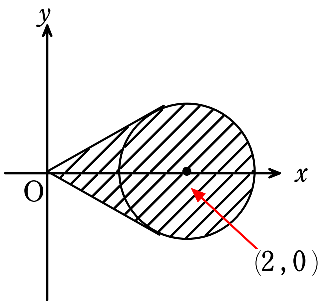
(2) $w$ の偏角の範囲を求めよ。

(解答) (1) $|z-2|\leqq 1$ より, $z$ は中心が $2$ , 半径 $1$ の円の周 , および内部を表す。この時, 仮に $w=2z$ とすると, $z=\dfrac{w}{2}$

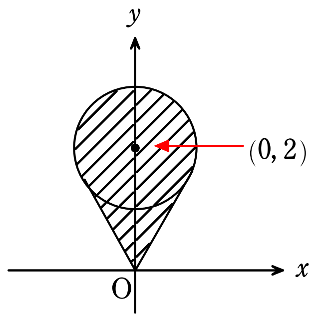
より, これを $|z-2|\leqq 1$ に代入すると $\left|\dfrac{w}{2}-2\right|\leqq 1$ より, $|w-4|\leqq 2$ となり, 中心が $4$ , 半径 $2$ の円を表す。

さて, $0<a\leqq 2$ のとき, $w=az$ とすると $z=\dfrac{w}{a}$ となり, これを $|z-2|\leqq 1$ に代入すると $\left|\dfrac{w}{a}-2\right|\leqq 1$

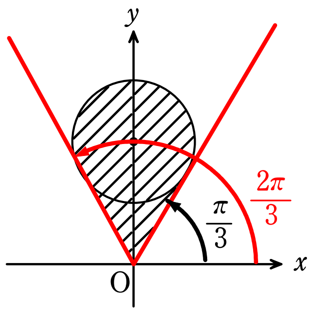
$|w-2a|\leqq a$ より, $w$ は $2a$ を中心とする半径 $a$ の円を表す。 $a=0$ の時は $w=0$ であることに留意し、 $0<a\leqq 2$ の範囲で $a$ を連続的に変化させると, $|w-2a|\leqq a$ によって表された $w$ が描く図形は, 左図の斜線部で表された図形を描く。




さて, ここでいよいよ $w=iaz$ の式で表された図形の話となるが, $az$ に $i$ をかけると, 左図を原点の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させることになるので, $w$ の存在範囲は下図のようになる。




(2)




$w$ の偏角の範囲については , 左図のように $w$ の存在範囲が２本の赤い半直線の間にあるので, 偏角を $\theta$ で表すと $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ となる。