チョイス（６訂版）239番

問題　実数 a , b を係数とする x についての２次方程式 $x^2+ax+b=0$ が虚数解 z を持つとき, 次の問いに答えよ。

(1)　z に共役な複素数 $\overline{z}$ も $x^2+ax+b=0$ の解であることを示せ。

(2)　a , b を z , $\overline{z}$ を用いて表せ。

(3)　$b-a\leqq 1$ を満たすとき, 点 z の存在範囲を複素数平面上に図示せよ。

(4)　点 z が(3)で求めた存在範囲を動くとき, $w=\dfrac{1}{z}$ で定まる点 w の存在範囲を複素数平面上に図示せよ。

方針　解の公式を使えば(1)は明らかですね。(2)は解と係数の関係を使えば良いですね。(3)は(2)の結果を使えばよいし, (4)は(3)と考え方はほとんど変わりません。

解答　(1) $x^2+ax+b=0$ について解の公式より, $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,i}{2}$ だから,

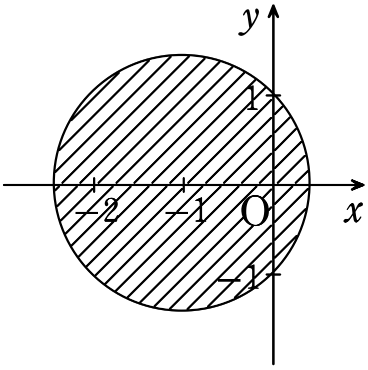
$\dfrac{-a}{2}+\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}=z$ なら $\dfrac{-a}{2}-\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i=\overline{z}$ だし, $\dfrac{-a}{2}-\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}=z$ なら, $\dfrac{-a}{2}+\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i=\overline{z}$

となるから, z に共役な複素数 $\overline{z}$ も $x^2+ax+b=0$ の解であると言える。

(2)　z と $\overline{z}$ が $x^2+ax+b=0$ の解だから, 解と係数の関係より $\begin{cases} z+\overline{z}=-a \\ z\overline{z}=b \end{cases}$ つまり $\begin{cases} a=-z-\overline{z} \\ b=z\overline{z} \end{cases}$ となる。

(3)　$b-a\leqq 1$ に $\begin{cases} a=-z-\overline{z} \\ b=z\overline{z} \end{cases}$ を代入し, $z\overline{z}+z+\overline{z}\leqq 1$　左辺を無理やり因数分解して　$(z+1)(\overline{z}+1)\leqq 2$

$|z+1|^2\leqq 2$　$\therefore |z+1|\leqq\sqrt{2}$　よって z は中心が -1 , 半径が $\sqrt{2}$ の円の周, 及び内部の領域を表す。（下図参照）



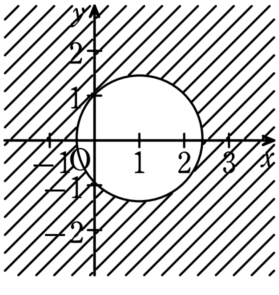
z の表す領域は左図の斜線部分。（但し, 境界線を含む。）

(4)　$w=\dfrac{1}{z}$ より $z=\dfrac{1}{w}$　これを $|z+1|\leqq\sqrt{2}$ に代入し, $\left|\dfrac{1}{w}+1\right|\leqq\sqrt{2}$　$\dfrac{|1+w|}{|w|}\leqq\sqrt{2}$　$|w+1|\leqq\sqrt{2}|w|$

両辺を２乗し, $|w+1|^2\leqq 2|w|^2$　$(w+1)(\overline{w}+1)\leqq 2w\overline{w}$　展開して整理すると　$w\overline{w}-w-\overline{w}\geqq 1$

左辺を無理やり因数分解して　$(w-1)(\overline{w}-1)\geqq 2$　$|w-1|^2\geqq 2$　$\therefore |w-1|\geqq\sqrt{2}$

つまり w は中心が 1 , 半径が $\sqrt{2}$ の円の周, 及び外部の領域を表す。



w の表す領域は左図の斜線部分。（但し, 境界線を含む。）