

チョイス (6訂版) 240番

問題 $z = \frac{t-2+i}{t+i}$ (t は実数) とする。次の問いに答えよ。

(1) $z = x + yi$ (x, y は実数) とするとき、 x, y を t で表せ。また $y > 0$ であることを示せ。

(2) $\frac{x-1}{y}$ を t で表せ。

(3) t が全ての実数を動くとき、 z が複素数平面上で描く図形を図示せよ。

(東京海洋大)

方針 (1) は分母を実数かすれば良いですね。(2) は(1) を利用すればよいし、(3) も(1) を利用すれば良いかな。では、(2) は(3) にどう関係があるんだろう。それはやってみないと分からない。

解答 (1) $z = \frac{t-2+i}{t+i} = \frac{(t-2+i)(t-i)}{(t+i)(t-i)} = \frac{t^2-2t+1+(-t+2+t)i}{t^2+1} = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}i$

よって $x = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1}$, $y = \frac{2}{t^2+1}$ また明らかに $y > 0$ である。

(2) (1) より、 $\frac{x-1}{y} = \frac{\frac{t^2-2t+1}{t^2+1}-1}{\frac{2}{t^2+1}} = \frac{t^2-2t+1-2}{2} = \frac{t^2-2t-1}{2}$

(3) $x = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1}$ より $x = 1 - \frac{2t}{t^2+1}$ つまり $\frac{x-1}{-2} = \frac{t}{t^2+1} \dots \textcircled{1}$

また、 $y = \frac{2}{t^2+1}$ より $\frac{y}{2} = \frac{1}{t^2+1} \dots \textcircled{2}$ ここまでやったら後はどうすれば良いか分かりますね。4STEPの媒介変数のところでやりましたが、「入試で媒介変数の問題が出るとしたら、これだよ」って言ったやつですね。

さて、①と②をそれぞれ辺々2乗して足すと $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{t^2+1}$ $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{y}{2}$

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2-2y+1}{4} = \frac{1}{4}$ $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

さて $x = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1}$ より $(t^2+1)x = t^2-2t+1$ t について整理すると $(x-1)t^2 + 2t + x - 1 = 0$

$x \neq 1$ つまり $t \neq 0$ のとき これを t についての2次方程式と見なすと、実数解をとるので判別式を D とすると

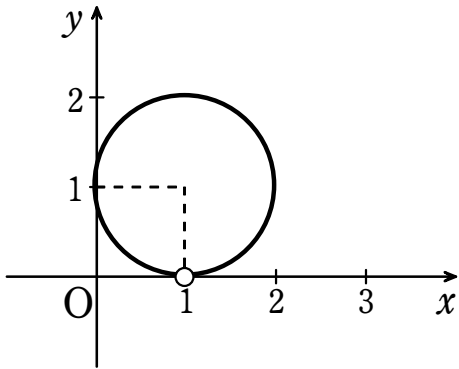
$\frac{D}{4} = 1 - (x-1)^2 \geq 0$ $x^2 - 2x \leq 0$ $x(x-2) \leq 0$ $\therefore 0 \leq x \leq 2$ $x \neq 1$ より $0 \leq x < 1, 1 < x \leq 2$

ところが $x = 1 - \frac{2t}{t^2+1}$ より $t = 0$ のとき $x = 1$ となるから、結局 x の取り得る範囲は $0 \leq x \leq 2$ となる。

また、 $\frac{y}{2} = \frac{1}{t^2+1}$ について $t^2+1 \geq 1$ だから $0 < \frac{1}{t^2+1} \leq 1$ よって $0 < \frac{y}{2} \leq 1$ より y の採りえる範囲は

$0 < y \leq 2$ 以上より z が描く図形は次のようになる。

チョイス (6訂版) 240番



多分, 模範解答では(2)を使っていると思われるので, 一応模範解答もしっかり検討してください。