チョイス（6訂版）241番

問題 0でない複素数 z に対して, $w=z+\dfrac{1}{z}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) w が実数となるための z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) w が実数で $1 \leqq w \leqq \dfrac{10}{3}$ を満たすとき, z の満たす条件を求めよ。この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

（熊本大）

方針 一般に z が実数であるとき $z=\overline{z}$ が成り立ちますから, それを利用すれば良いですね。

解答 (1)　$w=z+\dfrac{1}{z}$ において, w が実数であるので $w=\overline{w}$ より $z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$　この両辺に $z\overline{z}$ をかけて

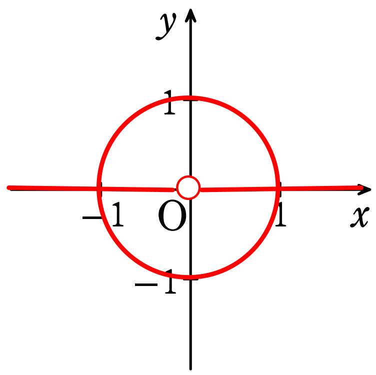
$z^2\overline{z}+\overline{z}=z(\overline{z})^2+z$　これを整理して　$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$　$(z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0$　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

よって $z=\overline{z}$ または $|z|=1$

(ア) $z=\overline{z}$ のとき　z は実数であるから z は実軸を表す。（但し, 原点を除く。）

(イ) $|z|=1$ のとき　z は単位円を表す。

(ア), (イ) より z の表す図形は以下の通り。



(2)　w が実数であるから, (1) の結果より

(ア) $z=\overline{z}$ のとき　z は実数だから　$w=z+\dfrac{1}{z}$　一方 $1 \leqq w \leqq \dfrac{10}{3}$ より $z>0$ である。よって

$1 \leqq z+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{10}{3}$ より　$z \leqq z^2+1 \leqq \dfrac{10}{3}z$　$\therefore z^2-z+1 \geqq 0$ または $z^2-\dfrac{10}{3}z+1 \leqq 0$

(i)　$z^2-z+1 \geqq 0$ のとき　$z^2-z+1=\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より $z^2-z+1 \geqq 0$ は常に成立する。

(ii)　$z^2-\dfrac{10}{3}z+1 \leqq 0$ のとき　$3z^2-10z+3 \leqq 0$ より　$(3z-1)(z-3) \leqq 0$　$\dfrac{1}{3} \leqq z \leqq 3$

(イ)　$|z|=1$のとき $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと, $1 \leqq w \leqq \dfrac{10}{3}$　つまり $1 \leqq z+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{10}{3}$ より

$1 \leqq \cos\theta+i\sin\theta+\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta} \leqq \dfrac{10}{3}$　つまり　$1 \leqq 2\cos\theta \leqq \dfrac{10}{3}$ より　$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{5}{3}$　これと

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ との共通範囲を求め　$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$　つまり z が描く図形は単位円の $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$ の部分である。

(ア), (イ) より z の表す図形は次の通り。

チョイス（６訂版）241番