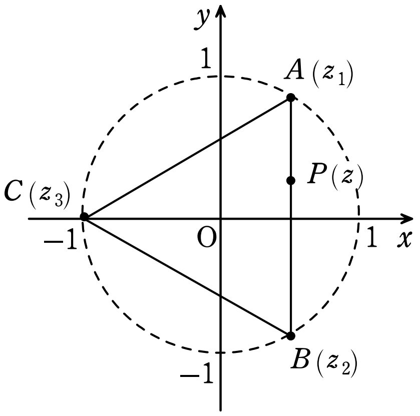
チョイス　242番

問題　３つの複素数 $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-1$ の表す複素数平面上の点をそれぞれ $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ とする。0でない複素数 z に対し $w=\dfrac{1}{z}$ によって w を定める。z , w が表す複素数平面上の点をぞれぞれ $P(z)$, $Q(w)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P が線分 AB 上を動くとき, Q の描くっきょくせんを複素数平面上に図示せよ。

(2) P が三角形 ABC の３辺上を動くとき, Q の描く曲線を平面上に図示せよ。

解答



$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}si$ （$-\sqrt{3}\leqq s\leqq\sqrt{3}$ ）とおくと

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}si}=\frac{2}{1+si}=\frac{2(1-si)}{1+s^2}=\frac{2}{1+s^2}-\frac{2s}{1+s^2}i$$ となる。

ここで $w=x+yi$ （x , y は実数）とおくと $\begin{cases} x=\dfrac{2}{1+s^2} \\ y=-\dfrac{2s}{1+s^2} \end{cases}$ つまり

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+s^2} \cdots ① \\ -\dfrac{y}{2}=\dfrac{s}{1+s^2} \cdots ② \end{cases}$$

これは媒介変数の絡む頻出問題ですね。絶対にマスターする必要があります。さて, ①, ②の両辺をそれぞれ二乗し, 辺々足すと

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{1+s^2}{(1+s^2)^2}=\frac{1}{1+s^2}=\frac{x}{2} \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{x}{2} \qquad x^2+y^2=2x$$ つまり $(x-1)^2+y^2=1$

ところで $-\sqrt{3}\leqq s\leqq\sqrt{3}$ より $0\leqq s^2\leqq 3$　$1\leqq 1+s^2\leqq 4$　$\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{1+s^2}\leqq 1$

よって　$\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{x}{2}\leqq 1$　　$\therefore \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$

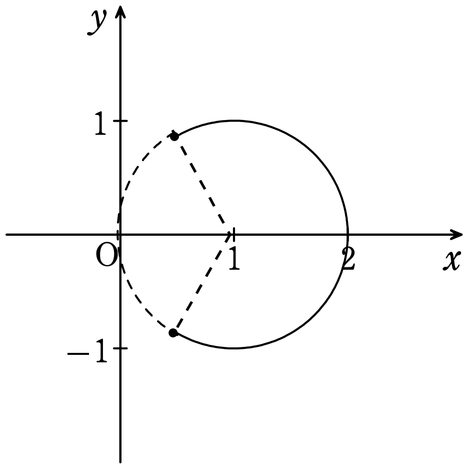
更に $-\dfrac{y}{2}=\dfrac{s}{1+s^2}$ について $f(s)=\dfrac{s}{1+s^2}$ （$-\sqrt{3}\leqq s\leqq\sqrt{3}$ ）とおくと, $f'(s)=\dfrac{1+s^2-s\times 2s}{(1+s^2)^2}=\dfrac{1-s^2}{(1+s^2)^2}$

$f'(s)=0$ とおいて解くと $s=\pm 1$　　このとき増減表は以下の通り

s	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(s)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(s)$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって $-\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2}\leqq\dfrac{1}{2}$ より　$-1\leqq y\leqq 1$

このとき　$(x-1)^2+y^2=1\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2,\ -1\leqq y\leqq 1\right)$ より, 点 Q が描く図形は次のようになる。



(2)　点 P が辺 AC 上にあるときは，辺 AB のにある点 P を原点の周りに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転すれば良いから

$z=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}si\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$　　　よって

$$w=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}si\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}=\left(\frac{2}{1+s^2}-\frac{2s}{1+s^2}i\right)\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$ より

点 Q の描く図形は　$(x-1)^2+y^2=1\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2,\ -1\leqq y\leqq 1\right)$ のグラフを原点の周りに $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転したものとなる。　更に点 P が辺 BC 上にあるときは, 辺 AB 上の点 P を原点の周りに $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転すれば良いから

$z=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}si\right)\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$　　よって

$$w=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}si\right)\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}}=\left(\frac{2}{1+s^2}-\frac{2s}{1+s^2}i\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

つまり点 Q の描く図形は　$(x-1)^2+y^2=1\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2,\ -1\leqq y\leqq 1\right)$ のグラフを原点の周りに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転したものとなる。以上より, 点 Q が描く図形は以下のようになる。