チョイス（6訂版）251番

$\boxed{問題}$　α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ … ①　について, 以下の問いに答えよ。但し, i は虚数単位である。

(1)　① が実数解を持つように α が動くとき, 点αが複素数平面上に動く図形を図示せよ。

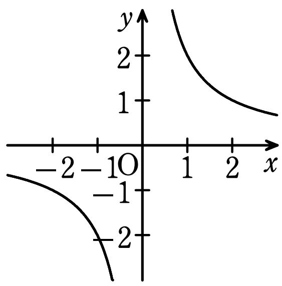
(2)　方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解に持つように動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数をβ とするとき, 点βが複素数平面上に描く図形を図示せよ。　（東北大）

$\boxed{方針}$　①が実数解を元からといって, 判別式を使おうとしては駄目ですよ。判別式が使えるのは実数係数の２次方程式だけで, ①のように複素数αや $2i$ を係数（定数項も「係数」と呼ぶことがあります）とする２次方程式には使えません。ここでは ①式の実数解を適当な文字で表して, αについて解けば良いですね。(2) については, 絶対値が1の複素数は $\cos\theta+i\sin\theta$ と表せますから, それを使えば何でもないですね。

$\boxed{解答}$　(1)　①の実数解を t とし, それを①式に代入すると $t^2-\alpha t+2i=0$　これをαについて解くと $\alpha=\dfrac{t^2+2i}{t}$

（但し $t\neq 0$）　$\alpha=t+\dfrac{2}{t}i$　ここで $\alpha=x+yi$ （x, y は実数）とおくと $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{2}{t} \end{cases}$　２式から t を消去すると

$y=\dfrac{2}{x}$　よって αの描く図形を図示すると右図のようになる。



(2)　z は絶対値が 1 の複素数だから　$z=\cos\theta+i\sin\theta$　とおいて ①式に代入すると

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2-\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)+2i=0$　これをαについて解くと

$$\alpha=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^2+2i}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta+\frac{2}{\cos\theta+i\sin\theta}i$$

$$=\cos\theta+i\sin\theta+\frac{2(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}i=\cos\theta+i\sin\theta+2i\cos\theta+2\sin\theta$$

$$=(\cos\theta+2\sin\theta)+(\sin\theta+2\cos\theta)i$$

このとき

$$\beta=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\{(\cos\theta+2\sin\theta)+(\sin\theta+2\cos\theta)i\}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\{(\cos\theta+2\sin\theta)+(\sin\theta+2\cos\theta)i\}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+2\sin\theta)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+2\cos\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+2\cos\theta)i+\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+2\sin\theta)i$$

チョイス（６訂版）251番

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{3}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)i$$

ここで $\beta=x+yi$ （ x,y は実数）とおくと $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta-\cos\theta)\cdots② \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\cdots③ \end{cases}$

②より　$x^2=\dfrac{1}{2}(1-2\sin\theta\cos\theta)\cdots②'$　　③より　$y^2=\dfrac{9}{2}(1+2\sin\theta\cos\theta)\cdots③'$

②'×9+③' より　$9x^2+y^2=9$　　$\therefore\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$　　このとき β の表す図形は以下の通り。