チョイス（６訂版）252番

問題　複素数平面上の２点 P(z), Q(w) が次の２つの条件を満たすとする。

- 線分OPの長さと線分OQの長さの積が１に等しい。
- Oを端とする半直線OP上にQがある。

(1)　z を w を用いて表せ。

(2)　点A$(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円からOを除いた曲線の上をPが動くとき, Qの軌跡を図示せよ。但し, i は虚数単位である。

(3)　$r>0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする。Pが点B(β) を中心とする半径 r の円周上を一周するとき, Qの軌跡を求めよ。　（北海道大）

方針　条件より, $z=t(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r\fallingdotseq 0)$ とおくと $w=\dfrac{1}{t}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおけますね。 それが分かれば(1)は簡単です。(2)については $|z-(1-i)|=\sqrt{2}$ だと分かります。これと(1)をどう組み合わせるかがポイントです。
(3)については $|z-\beta|=r$ とおけますが,さあ, どう(1)や(2)と関連付けましょうか。

解答　(1)　$z=t(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r\fallingdotseq 0)$ とおくと $w=\dfrac{1}{t}(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表せますが, $\overline{w}=\dfrac{1}{t}(\cos\theta-i\sin\theta)$ とより, $z\overline{w}=1$ 。よって $z=\dfrac{1}{\overline{w}}$ となる。

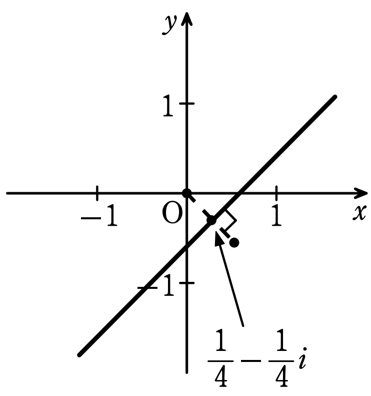
(2)　仮定より $|z-(1-i)|=\sqrt{2}$ 。これに $z=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入し, $\left|\dfrac{1}{\overline{w}}-(1-i)\right|=\sqrt{2}$　　$\left|\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{w}}\right)-(1-i)}\right|=\sqrt{2}$

$\left|\dfrac{1}{w}-(1+i)\right|=\sqrt{2}$　　$\dfrac{1-(1+i)w}{w}$　　$\left|\dfrac{1-(1+i)w}{w}\right|=\sqrt{2}$　　$|1-(1+i)w|=\sqrt{2}\,|w|$

$|(1+i)w-1|=\sqrt{2}\,|w|$　　$|1+i|\left|w-\dfrac{1}{1+i}\right|=\sqrt{2}\,|w|$　　$\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1-i}{2}\right|=\sqrt{2}\,|w|$

$\left|w-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\right|=|w-0|$　　つまり Qは２点 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ と原点Oを結ぶ線分の垂直２等分線を描く。

よってそれを図示すると以下のようになる。



(3)　仮定より $|z-\beta|=r$ （但し $|\beta|\fallingdotseq r$, つまり点Pは原点を通らない。）　これに $z=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入し

$\left|\dfrac{1}{\overline{w}}-\beta\right|=r$　　$\left|\dfrac{1-\beta\overline{w}}{\overline{w}}\right|=r$　　$|1-\beta\overline{w}|=r|\overline{w}|$　　$|\beta\overline{w}-1|^2=r^2|\overline{w}|^2$

チョイス（６訂版）252番

$(\beta\overline{w}-1)(\overline{\beta}w-1)=r^2w\overline{w}$ $\quad |\beta|^2w\overline{w}-\beta\overline{w}-\overline{\beta}w+1-r^2w\overline{w}=0$

$(|\beta|^2-r^2)w\overline{w}-\beta\overline{w}-\overline{\beta}w=-1$ $\quad w\overline{w}-\dfrac{\beta\overline{w}}{|\beta|^2-r^2}-\dfrac{\overline{\beta}w}{|\beta|^2-r^2}=-\dfrac{1}{|\beta|^2-r^2}$

$$\left(w-\frac{\beta}{|\beta|^2-r^2}\right)\left(\overline{w}-\frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2-r^2}\right)=-\frac{1}{|\beta|^2-r^2}+\left(\frac{\beta}{|\beta|^2-r^2}\right)\left(\frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2-r^2}\right)$$

$$\left|w-\frac{\beta}{|\beta|^2-r^2}\right|^2=\frac{-|\beta|^2+r^2+|\beta|^2}{(|\beta|^2-r^2)^2} \qquad \left|w-\frac{\beta}{|\beta|^2-r^2}\right|=\frac{r}{||\beta|^2-r^2|}$$

よって点Qは $\dfrac{\beta}{|\beta|^2-r^2}$ を中心とする半径 $\dfrac{r}{||\beta|^2-r^2|}$ の円（円周）を描く。