ガウス記号と二次方程式

問題 実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。例えば，$[2]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n を全て求めよ。

(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[x]+5=0$ を満たす x を全て求めよ。

解答

(1) $[x]$で表された記号の名前を「ガウス記号」と言います。その意味は「x を超えない最大の整数」となります。
「$n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n」を求めるのですが，まず，$n^2-5n+5=0$とおいて，解の公式で n を求めます。
つまり $n=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ ですね。このとき $n^2-5n+5<0$ の解は，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ ですから，この範囲にある整数 n は，$n=2,3$ ですね。

(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす $[x]$ は整数ですから，(2)で求めた値がその値です。つまり，$[x]=2,3$ となります。
$[x]=2$のとき，それを満たす x は，$2\leqq x<3$ となります。また，$[x]=3$のとき，それを満たす x は，$3\leqq x<4$ となります。つまり，与式を満たす x の範囲は，$2\leqq x<4$ ということになります。

(3) $2\leqq x<3$ のとき $x^2-5[x]+5=0$ は $x^2-10+5=0$ となり，それを解くと $x=\pm\sqrt{5}$ となります。$2\leqq x<3$ ですから，$x=\sqrt{5}$ です。また，$3\leqq x<4$ のとき $x^2-5[x]+5=0$ は $x^2-15+5=0$ となり，それを解くと $x=\pm\sqrt{10}$ となります。ところが $3\leqq x<4$ ですから，$x=\sqrt{10}$ ですね。