メジアン（新課程）337番

問題　数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。$a_1=0$　$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (nが奇数のとき)\\ a_n+1 & (nが偶数のとき)\end{cases}$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

(1)　a_{10} を求めよ。

(2)　n が奇数の場合と偶数の場合のそれぞれについて，a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　a_n を3で割ったときの余りを求めよ。　(11 岡山大)

方針　とにかく順番に $a_2, a_3, \cdots$ と求めていくしかありませんね。そうやって n が奇数の場合と偶数の場合のそれぞれについて，a_{n+1} を a_n の関係を考えるわけです。

解答　(1) 定義に従って, $a_2, a_3, \cdots$ と求めていくと，$a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=2$, $a_5=3$, $a_6=6$, $a_7=7$, $a_8=14$, $a_9=15$, $a_{10}=30$

(2) n が奇数の場合，$a_5=a_4+1=2a_3+1=2(a_2+1)+1=2a_2+3=2(2a_1)+3=4a_1+3$

$a_7=a_6+1=2a_5+1=2(a_4+1)+1=2a_4+3=2(2a_3)+3=4a_3+3$　これで何とか方向性が読めてきました。

n が奇数の場合

$a_{n+4}=a_{(n+3)+1}=a_{n+3}+1=a_{(n+2)+1}+1=2a_{n+2}+1=2a_{(n+1)+1}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2(2a_n+1)+1=4a_n+3$

n が偶数の場合

$a_{n+4}=a_{(n+3)+1}=2a_{n+3}=2a_{(n+2)+1}=2(a_{n+2}+1)=2a_{(n+1)+1}+2=4a_{n+1}+2=4(a_n+1)+2=4a_n+6$

(3) n が奇数の場合, $a_{n+4}=4a_n+3=a_n+3a_n+3$ だから, $a_{n+4}\equiv a_n\ (mod3)$　また, n が偶数の場合,

$a_{n+4}=4a_n+6=a_n+3a_n+6$ だから，$a_{n+4}\equiv a_n\ (mod3)$

つまり,

$a_1\equiv a_5\equiv a_9\equiv\cdots\equiv a_{4n-3}\equiv 0\ (mod3)$　（n は自然数）

$a_2\equiv a_6\equiv a_{10}\equiv\cdots\equiv a_{4n-2}\equiv 0\ (mod3)$　（n は自然数）

$a_3\equiv a_7\equiv a_{11}\equiv\cdots\equiv a_{4n-1}\equiv 1\ (mod3)$　（n は自然数）

$a_4\equiv a_8\equiv a_{12}\equiv\cdots\equiv a_{4n}\equiv 2\ (mod3)$　（n は自然数）　となります。