

新課程メジアン 34番

問題 a, b, c を整数とし、2次方程式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。但し、 $a \neq 0$ である。 $|x| \leq 1$ を満たす全ての実数 x に対して、 $|f(x)| \leq 1$ が成り立つとする。

- (1) a, b, c を $f(-1), f(0), f(1)$ を用いて表せ。
 (2) $f(x)$ を全て求めよ。

ヒント (1) は多分できると思います。(2) については、あることに気づけば(後述しますが)簡単なのですが、そうでないと、とても煩雑で解けない人が続出する問題だと思います。受験においては、そういう問題こそ解けることが大切です。

解答

(1) しょっちゅう語ってることですが、未知数(値の分かっていない文字のこと)の値を求めるには、未知数の数だけ方程式が必要です。 $f(-1), f(0), f(1)$ で a, b, c の式が3本できますから、 $f(-1), f(0), f(1)$ を数字と見なせば、解くことができますね。さて、仮定より

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c \\ f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a + b + c = f(1) \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a - b + c = f(-1) \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c = f(0) \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ に代入し, } \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \cdots \cdots \textcircled{1}' \\ a - b = f(-1) - f(0) \cdots \cdots \textcircled{2}' \end{cases}$$

$$\textcircled{1}' + \textcircled{2}' \text{ より } 2a = f(1) + f(-1) - 2f(0) \quad \therefore a = \frac{1}{2}\{f(1) + f(-1) - 2f(0)\}$$

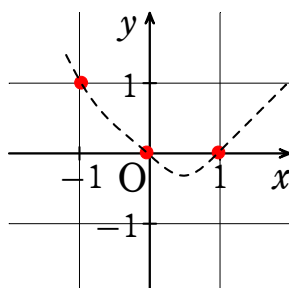
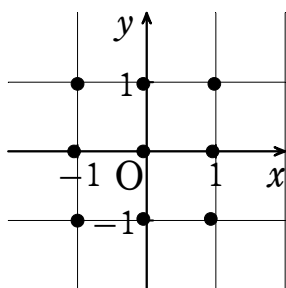
$$\textcircled{1}' - \textcircled{2}' \text{ より } 2b = f(1) - f(-1) \quad \therefore b = \frac{1}{2}\{f(1) - f(-1)\}$$

$$\text{以上より, } a = \frac{1}{2}\{f(1) + f(-1) - 2f(0)\} \quad b = \frac{1}{2}\{f(1) - f(-1)\} \quad c = f(0)$$

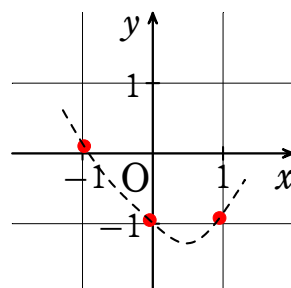
(2) a, b, c は整数だから、2次方程式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ において、 x に整数を代入すると、 $f(x)$ の値は全て整数になる。ところで、 $|x| \leq 1$ を満たす整数 x は、 $x = -1, 0, 1$ で、それらの x に対する、 $f(-1), f(0), f(1)$ の値は $|f(x)| \leq 1$ を満たすので、 $-1, 0, 1$ の3つの値しかとり得ない。これらより、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ のグラフは、次のグラフ上の9点のうち3点を通ることになる。勿論、二次関数のグラフの特徴から、その3点が x 軸や y 軸に平行に並んだり、9点からなる正方形の対角線上に並ぶこともあり得ない。よって、その並びは以下の場合に限られる。

(9点の配置)

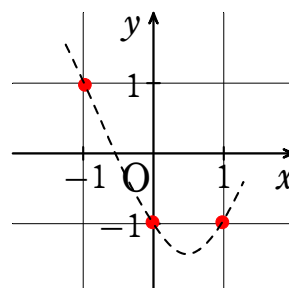
(i) $a > 0, b < 0$ の場合の考え得る3点の配置



(ア)



(イ)



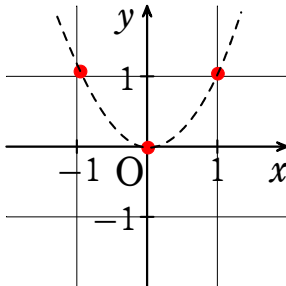
(ウ)

(ア) の場合 $a = \frac{1}{2}\{f(1) + f(-1) - 2f(0)\} = \frac{1}{2}(0 + 1 - 0) = \frac{1}{2}$ より, a が整数であることに反し不適。

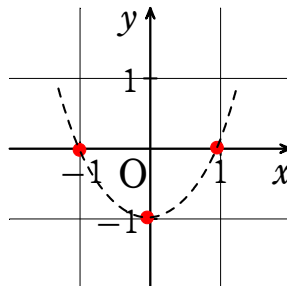
(イ) の場合 $0 < x < 1$ で $f(x)$ の絶対値が1を超えるので不適。

(ウ) の場合 $0 < x < 1$ で $f(x)$ の絶対値が1を超えるので不適。

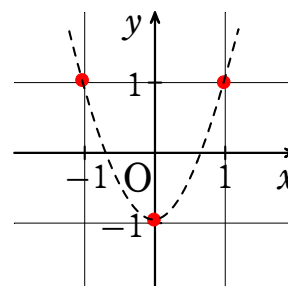
(ii) $a > 0, b = 0$ の場合の考え得る3点の配置



(エ)



(オ)



(カ)

(エ) の場合 明らかに $f(x) = x^2$ となります。

(オ) の場合 明らかに $f(x) = x^2 - 1$ となります。

(カ) の場合 $a = \frac{1}{2}\{f(1) + f(-1) - 2f(0)\} = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2) = 2, b = 0, c = f(0) = -1$

よって $f(x) = 2x^2 - 1$

(i) のグラフを左右反転した場合、つまり $a > 0, b > 0$ の場合は全て駄目だし、適する場合として、(ii) 以外に (ii) の上下反転した場合があるので、 $f(x)$ を全て書き出すと $f(x) = \pm(2x^2 - 1), f(x) = \pm x^2, f(x) = \pm(x^2 - 1)$ の6つとなる。