方程式の解と微分の利用（応用編①）

微分を使って方程式 $f(x)=0$ の解の存在を確かめる方法の１つとして、関数 $f(x)$ のグラフの単調性と中間値の定理を利用する方法がありますが、中にはやや難しい問題も少なくありません。今回はそんな問題にチャレンジしてみましょう。

問題 $f(x)=x^2+4n\cos x+1-4n$ （$n=1,2,3,\cdots$）として、以下の問いに答えよ。

(1) 各 n に対して $f(x)=0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x がただ１つずつあることを示せ。

(2) (1)の条件を満たす x を x_n とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n^2$ を求めよ。　　（防衛医科大）

解答

(1) 与式より、$f'(x)=2x-4n\sin x$ 　これではまだ $f'(x)=0$ とおいた方程式の解やグラフの単調性について分からないので、再度、x について微分してみます。 $f''(x)=2-4n\cos x$ 　とりあえず $f''(x)=0$ として解くと

$\cos x=\dfrac{1}{2n}$ 　この三角方程式の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における解を α とすると、増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	↘	$f'(\alpha)$	↗	/
$f''(x)$	/	$-$	0	$+$	/

ところで、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=0$ 、$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}-4n<0$ （$\because n=1,2,3,\cdots$）

だから、増減表より $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において、$f'(x)<0$ と分かります。つまり

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は単調減少と分かります。更に、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$ 、$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\dfrac{\pi^2}{4}+1-4n<0$

（$\because n=1,2,3,\cdots$）ですから、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は x 軸と１点で交わる。つまり、各 n に対して

$f(x)=0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x がただ１つずつあると言えます。

(2) 仮定より $x_n^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ が成り立ちます。この問題は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示すわけですが、当然、それに利用するのは $x_n^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ しかありません。$n\to\infty$ で x_n が 0 に収束することを示すわけですから、$x_n^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ の式は両辺を n で割るしか手はありませんね。その前に n について整理しておきましょう。$x_n^2+1+4n(\cos x_n-1)=0$ 　この両辺を n で割って、$\dfrac{x_n^2+1}{n}+4(\cos x_n-1)=0$ 　やっぱ両辺を４でも割っておいて、$\cos x_n-1$ を移項しよう。$\dfrac{x_n^2+1}{4n}=1-\cos x_n$ 　このとき、両辺の極限をとると

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2+1}{4n}=\lim_{n\to\infty}(1-\cos x_n)$ 　つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\cos x_n)=0$ 　より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos x_n=1$ となり、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ であることを考えると、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 　であると言えます。

方程式の解と微分の利用（応用編 ①）

(3)　$\lim_{n\to\infty} n x_n^2$ を求めよということですが、これも　$x_n^2+1+4n(\cos x_n-1)=0$　を利用する以外に手はありません。

この式で気になるのが、$\cos x_n-1$ の部分です。三角関数が関わる極限の問題ですから　$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$　の形にすることを予想しなければなりません。そこで　$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$　の公式を利用します。$x_n^2+1+4n(\cos x_n-1)=0$　より

$x_n^2+1+4n\left(1-2\sin^2\dfrac{x_n}{2}-1\right)=0$　つまり　$x_n^2+1-8n\sin^2\dfrac{x_n}{2}=0$　無理矢理 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ の形にして、

$$x_n^2+1-8n\left(\frac{\sin\frac{x_n}{2}}{\frac{x_n}{2}}\right)^2\times\frac{x_n^2}{4}=0 \qquad x_n^2+1-2nx_n^2\left(\frac{\sin\frac{x_n}{2}}{\frac{x_n}{2}}\right)^2=0$$

nx_n^2 について解くと

$$nx_n^2=\frac{x_n^2+1}{2\left(\frac{\sin\frac{x_n}{2}}{\frac{x_n}{2}}\right)^2}$$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+1}{2\left(\frac{\sin\frac{x_n}{2}}{\frac{x_n}{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}$　となりますね。めでたし、めでたし。