数学的帰納法による不等式の証明と微分（応用編 ①）

数Ｂで学ぶ数学的帰納法は、むしろ数Ⅲで良く出題されます。今回は数学的帰納法と微分を使った不等式の証明について学びます。

まず、数学的帰納法の最も基本的な考え方を復習しましょう。その考え方を理解する上で役立つのが「ドミノ倒し」です。「ドミノ倒し」において、どれだけドミノの数が多くとも、次の2点さえ満足していれば全てのドミノが倒れると言えます。その2点とは

⑴ 最初のドミノが倒れること
⑵ あるドミノが倒れたら次のドミノが倒れること（但し、あるドミノに最初のドミノは含まれます。）

なぜ、この2点を満足すれば全てのドミノが倒れるかというと、⑴で最初のドミノが倒れ、最初のドミノを「あるドミノ」とすると、⑵で2番目のドミノが倒れることが分かり、2番目のドミノを「あるドミノ」とすると、⑵より3番目のドミノが倒れることが分かり、……　という具合に全てのドミノが倒れると言える訳です。

数学的帰納法も、全くそれと同じように理解することが出来ます。では、早速、数学的帰納法を利用して、入試問題に挑戦してみましょう。

問題　$x>0$ のとき、任意の自然数 n に対して、

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$　　が成り立つことを証明せよ。但し、e は自然対数の底とする。　（岡山大）

解答　数学的帰納法を使って証明します。

（Ⅰ）$n=1$ のとき

与式について　$(\text{左辺})-(\text{右辺})=1-\left(1-\frac{x}{1!}\right)e^x=1-(1-x)e^x$

ここで　$y=1-(1-x)e^x$（$x>0$）とおいて、両辺を微分すると　$\frac{dy}{dx}=e^x-(1-x)e^x=xe^x>0$（$\because x>0$）

つまり y は単調増加となる。更に x に 0 を代入すると、$y=1-1=0$ となり、$x>0$ で $y>0$ であると分かる。

（※ $y=1-(1-x)e^x$（$x>0$）であるが、この関数自体は $x\geqq 0$ で連続である。）すなわち $(\text{左辺})-(\text{右辺})>0$ となり、$(\text{左辺})>(\text{右辺})$　が成り立ち、与式は成立する。

（Ⅱ）$n=k$（k は自然数）のとき、与式が成立すると仮定し

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}>\left(1-\frac{x^k}{k!}\right)e^x$ とおく

このとき、$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^k}{k!}-\left(1-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)e^x$（$x>0$）と定義し、この式の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^k}{k!}e^x-\left(1-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)e^x$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}-\left(1-\frac{x^k}{k!}\right)e^x+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^x>0$$

$$\left(\because 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}>\left(1-\frac{x^k}{k!}\right)e^x\right)$$

よって $f(x)$ は単調増加となり、更に $f(0)=0$ より、 $n=k+1$ のときも 与式は成立すると言える。

（Ｉ）,（Ⅱ）より、全ての自然数 n について、与式は成立すると言える。