定点を通る接線の本数（応用編①）

定点を通る接線の本数の問題については、数Ⅱでも何度かやっていますが、数Ⅲでも頻出問題の１つです。今回はそんな入試問題を研究してみましょう。

$\boxed{\text{問題}}$　a は実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線の内で、点 $P(a,3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。$n(a)$ を求めよ。但し、必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ と用いても良い。

$\boxed{\text{問題}}$　この種の問題は解き方の定石があって、その通りやれば必ず解けます。では、始めましょう。

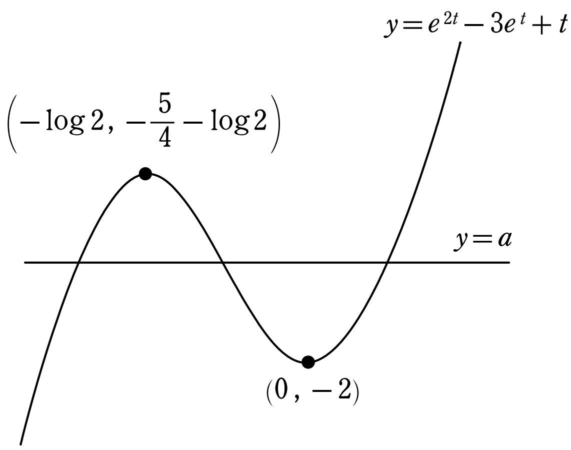
まず、$y=f(x)=e^x$ とおくと、$f'(x)=e^x$　　接点の座標を (t,e^t) とすると、$f'(t)=e^t$ より、法線の方程式は $y-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)$　これが点 $P(a,3)$ を通るので、$3-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(a-t)$　この式を a について解くと $a=e^{2t}-3e^t+t$ となる。このとき、$y=a$ と $y=e^{2t}-3e^t+t$ とおいて、２つのグラフの交点の数を考えれば良い。

$y=e^{2t}-3e^t+t$ より、$\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t}-3e^t+1$　$\dfrac{dy}{dt}=0$ とおいて解くと、$(2e^t-1)(e^t-1)=0$　よって $e^t=\dfrac{1}{2},1$ より、$t=\log\dfrac{1}{2},0=-\log 2,0$　このとき、$y=e^{2t}-3e^t+t$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	$-\log 2$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-\dfrac{5}{4}-\log 2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

また、$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}(e^{2t}-3e^t+t)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(e^{2t}-3e^t+t)=\infty$ となり

$y=a$ と $y=e^{2t}-3e^t+t$ のグラフの関係は以下のようになり、$n(a)$ については、次のように場合分け出来る。



$$n(a)=\begin{cases}1 & \left(a<-2,\ -\dfrac{5}{4}-\log 2<a\right)\\ 2 & \left(a=-2,\ -\dfrac{5}{4}-\log 2\right)\\ 3 & \left(-2<a<-\dfrac{5}{4}-\log 2\right)\end{cases}$$