メジアン（新課程）62番

問題 $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする。

(1) a^3 を a の1次式で表せ。　(2) a は整数であることを示せ。

(3) $b=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするといき, b を越えない最大の整数を求めよ。　（23　早稲田大）

方針 とにかく $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ の公式を利用して, 与式を展開することが出発点ですね。

解答 (1) $a^3=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3-3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^2(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})$

$+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})-(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3$

$=5\sqrt{2}+7-3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})}+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})}-(5\sqrt{2}$
$-7)$

$=14-3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})=14-3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})=14-3a$

(2) $a^3=14-3a$ より $a^3+3a-14=0$　$(a-2)(a^2+2a+7)=0$　$(a-2)\{(a+1)^2+6\}=0$

a は実数だから　$a=2$

(3) $b^3=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^2(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})+(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3$

$=5\sqrt{2}+7+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})}+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})}+(5\sqrt{2}$
$-7)$

$=10\sqrt{2}+3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})=10\sqrt{2}+3b$

$b^3-3b-10\sqrt{2}=0$　$(b-2\sqrt{2})(b^2+2\sqrt{2}+5)=0$　$(b-2\sqrt{2})\{(b+\sqrt{2})^2+3\}=0$

b は実数だから　$b=2\sqrt{2}$　$2<2\sqrt{2}<3$ より　b を越えない最大の整数は2