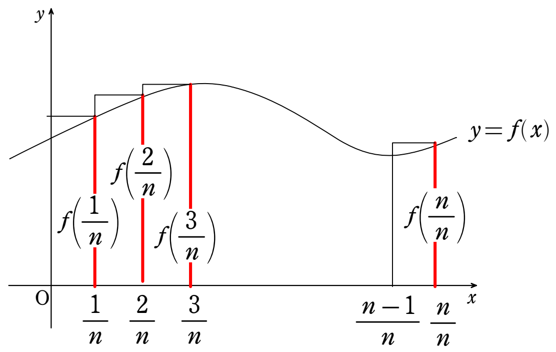
区分求積法と積分について ①

【１】下の図を見て，以下の各問に答えなさい。



① 上の図形における短冊の面積の合計

$$\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$

をシグマを使って表しなさい。

② ①において，$n\to\infty$ としたものを積分の記号を使って表しなさい。

【２】次の極限を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$$

【３】次の極限を求めなさい。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$

② $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$

（　）【１】

① $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

【２】

$$\text{与式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

【３】

① $\displaystyle\text{与式}=\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx=\int_0^1(3+x)'\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx$

$$=\left[(3+x)\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right]_0^1-\int_0^1(3+x)\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}x}dx$$

$$=4\log\frac{4}{3}-\int_0^1 dx=4\log\frac{4}{3}-1$$

② $\displaystyle a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$

$\displaystyle=3\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$　とおくと

$$\log a_n=\log 3\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$$

$$=\log 3+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)=\log 3$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}$$

$$=\log 3+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log 3+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)\right)=\log 3+4\log\frac{4}{3}-1$$

$$= \log 3 + \log \frac{256}{81} - \log e = \log \frac{256}{27e}$$

よって

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)} = \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{256}{27e}$$