チョイス（6訂版）77番

$\boxed{\text{問題}}$　$0<a<b$ とき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\log b-\log a}<\frac{a+b}{2}$$　但し, 対数は自然対数とする。　（岐阜大）

$\boxed{\text{方針}}$　真ん中の式だけを見ると, 平均値の定理が使えるように思えますが, そのためには各辺の逆数をとって

$\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{\log b-\log b}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$　として, $\dfrac{\log b-\log a}{b-a}=\dfrac{1}{c}$, $a<c<b$ などの関係式を使うことになりますが, これでは証明したい式の左右の $\dfrac{2}{a+b}$ や $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ との大小関係が説明できません。従って, 平均値の定理を使うという案は却下せざるを得ません。では, そうすれば良いのか。与式を

$\sqrt{ab}(\log b-\log a)<b-a<\dfrac{a+b}{2}(\log b-\log b)$　と同値変形し, 2つの不等式を証明するという方針で解くことになります。但し, a , b の一方を定数, 他方を変数として扱い, 関数の微分を利用しなければなりませんね。

$\boxed{\text{解答}}$　$0<a<b$ だから　$\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<\dfrac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow$　$\sqrt{ab}(\log b-\log a)<b-a<\dfrac{a+b}{2}(\log b-\log a)$

$\Leftrightarrow$　$\begin{cases} b-a-\sqrt{ab}(\log b-\log a)>0 \cdots ① \\ \dfrac{a+b}{2}(\log b-\log a)-b+a>0 \cdots ② \end{cases}$　よって, ①, ②の両不等式が成り立つことを証明すれば, 与式を証明したことになる。

(ア) ①式の証明

$f(x)=b-x-\sqrt{bx}(\log b-\log x)$ とおいて, $0<x<b$ の範囲で $f(x)>0$ であることを証明すれば, ①式を証明したことになる。

さて, $f'(x)=-1-\dfrac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}(\log b-\log x)-\sqrt{bx}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-1-\dfrac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}(\log b-\log x)+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$

$$=\frac{-2\sqrt{x}-\sqrt{b}\log b+\sqrt{b}\log x+2\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}$$

ここで $g(x)=-2\sqrt{x}-\sqrt{b}\log b+\sqrt{b}\log x+2\sqrt{b}$ とおくと, $g'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{b}}{x}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{x}$

$0<x<b$ より $g'(x)>0$ となり, $g(x)$ は単調増加となる。ところで, $g(b)=0$ より　$0<x<b$ で $g(x)<0$ となり $f'(x)<0$ となる。すなわち $f(x)$ は単調減少となる。更に $f(b)=0$ より　$0<x<b$ で $f(x)>0$ となり, ①式は成立すると言える。

(イ) ②式の証明

$h(x)=\dfrac{x+b}{2}(\log b-\log x)-b+x$ とおいて, $0<x<b$ の範囲で $h(x)>0$ であることを証明すれば, ②式を証明したことになる。

さて, $h'(x)=\dfrac{1}{2}(\log b-\log x)+\dfrac{x+b}{2}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)+1=\dfrac{x(\log b-\log x)-x-b+2x}{2x}=\dfrac{x(\log b-\log x)+x-b}{2x}$

チョイス（６訂版）77番

$k(x)=x(\log b-\log x)+x-b$　とおくと, $k'(x)=\log b-\log x-1+1=\log b-\log x>0$　（∴ $0<x<b$ ）
よって $k(x)$ は単調増加であり, $k(b)=0$ より, $0<x<b$ で $k(x)<0$ となり, $h'(x)<0$ となる。よって, $h(x)$ は単調減少となり, $h(b)=0$ より, $0<x<b$ で $h(x)>0$ となり, ②式は成立すると言える。
(ア) , (イ) より, ①, ②は共に成立し, 与式は成立すると言える。