チョイス（６訂版）79番

問題 関数 $f(x)$ を $f(x)=x\sin x-\cos x$ で定める。また, n を自然数とする。

(1) $2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において, $f(x)=0$ となる x がただ１つ存在することを示せ。

(2) (1) での $f(x)=0$ となる x の値を a_n $\left(2n\pi<a_n<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ を示せ。

（北海道大）

方針 (1) 基本に忠実に $2n\pi\leqq x\leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が連続かつ, 単調増加, あるいは単調減少で,

$f(2n\pi)\cdot f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ となることを証明すれば良いですね。(2) $a_n\sin a_n-\cos a_n=0$ をどう変形するかがポイントですね。

解答 (1) 与式より $f'(x)=\sin x+x\cos x+\sin x=2\sin x+x\cos x=\cos x(2\tan x+x)$ よって

$2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)>0$ となり, $2n\pi\leqq x\leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は連続, かつ単調増加で,

$f(2n\pi)\cdot f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\times\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ だから, $2n\pi<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において, $f(x)=0$ となる x がただ１つ存在すると言える。

(2) $a_n\sin a_n-\cos a_n=0$ $\left(2n\pi<a_n<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ より $a_n=\dfrac{\cos a_n}{\sin a_n}=\dfrac{1}{\tan a_n}$

一方 $2n\pi<a_n<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n\pi=\infty$, かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\infty$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

つまり $a_n=\dfrac{1}{\tan a_n}$ より、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan a_n=0$ である。ところが $2n\pi<a_n<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$n\to\infty$ のとき, $a_n\to 2n\pi$ である。つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ であると言える。