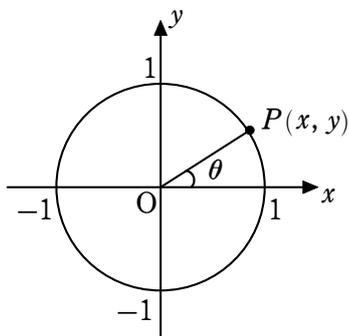


マジアン (新課程) 88番

問題 正の実数 x と y が $9x^2 + 16y^2 = 144$ を満たしているとき、 xy の最大値は ある。(20 慶応大)

方針 この問題を考えるうえで大切なのは単位円上の点の座標についての理解です。左下の単位円で、点 P の x 座標と y 座標を θ を使ってどう表せるか分かりますか。三角比で何度もやっていること

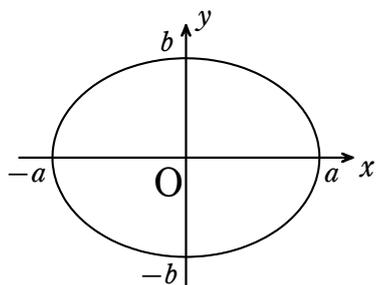


とですから、多分分かっていますよね。そうです。 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ となります。

では、 x, y 座標をそれぞれ a 倍、 b 倍 ($a > 0, b > 0$) するとどんな図形になるでしょうか。下のような楕円になります。ところで、その楕円の方程式はどう表さ

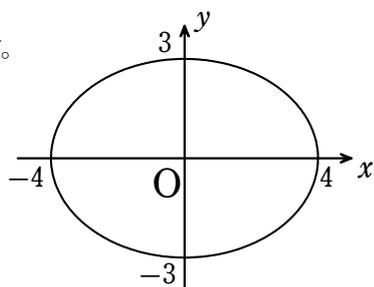
れるでしょうか。 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ より、 $\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{a} \\ \sin \theta = \frac{y}{b} \end{cases}$ とし、それを

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入し、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となります。



解答 $9x^2 + 16y^2 = 144$ の両辺を144で割ると、 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ となります。よって、そのグラフは下の図のようになります。

ます。



このとき、 $\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$ と表されますから、 $xy = 12 \sin \theta \cos \theta$

つまり、 $xy = 6 \sin 2\theta$ となります。ところで、 $x > 0, y > 0$ ですから

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となり、 $0 < 2\theta < \pi$ より、 $\sin 2\theta$ の最大値は1となり、 xy の

最大値は6となります。勿論、このとき $2\theta = \frac{\pi}{2}$ より、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となります。