メジアン（新課程）89番

by Aokijuku

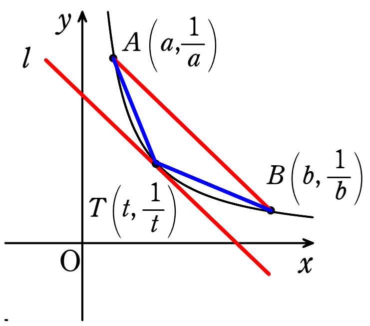
問題　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ をとる。ただし，$0<a<b$ とする。

(1)　$a<t<b$ を満たす実数 t に対して点 $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ をとり，三角形 ATB の面積を $f(t)$ で表す。関数 $f(t)$ $(a<t<b)$ の最大値を M とするとき，$f(t)=M$ を満たす t を a，b を用いて表せ。

(2)　$a=1$，$b=2$ のとき，(1) で求めた $f(t)$ の最大値 M を求めよ。

方針　以下のことは数Ⅲの微積分で習う内容ですが，$y=x^n$ において，$y'=nx^{n-1}$ という微分公式は，n が自然数のときだけでなく，n が有理数の場合でも同様に成り立ちます。これを利用すれば，この問題はとても簡単に出来ます。まずは，それを使って解いてみましょう。その後で数ⅠAⅡBの範囲でも解いてみますね。

問題　(1)　$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ より，$y'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$



点Tにおける曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の接線を l とすると，△ATBの面積が最大となるのは，辺ABと接線 l が平行となるときで，辺ABの傾きは $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\dfrac{a-b}{ab\,(b-a)}=-\dfrac{1}{ab}$ であり，点Tにおける接線の傾きが $-\dfrac{1}{t^2}$ だから，$-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{1}{ab}$ より $t^2=ab$

$t>0$ より　$t=\sqrt{ab}$

(2)　$a=1$，$b=2$ より 3 点A，B，Tの座標はそれぞれ $A\,(1,1)$，$B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，$T\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だから，点Aの座標が $(0,0)$ となるように 3点A，B，Tを平行移動すると，点Bは $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，点Tは $\left(\sqrt{2}-1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$ に移るので，求める $f(t)$ の最大値 M は

$$M=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right|=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

となる。

別解

(1) 数ⅠAⅡBの範囲の知識で解くと以下のようになります。まず，点Aの座標が $(0,0)$ となるように 3点A，B，Tを平行移動すると，点Bは $\left(b-a,\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$，点Tは $\left(t-a,\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{a}\right)$ に移り，$f(t)$ の面積は

$$f(t)=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)(t-a)-(b-a)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{a-b}{ab}t-\frac{a}{b}+1-(b-a)\frac{1}{t}+\frac{b}{a}-1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{b-a}{ab}t-(b-a)\frac{1}{t}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{b^2-a^2}{ab}-\left\{\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}\right\}\right|$$ となります。

ところで $\frac{b-a}{ab}t$ と $(b-a)\frac{1}{t}$ について $\frac{b-a}{ab}t>0$ かつ $(b-a)\frac{1}{t}>0$ だから

相加平均≧相乗平均より $$\frac{\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}}{2}\geqq\sqrt{\frac{b-a}{ab}t\times(b-a)\frac{1}{t}}$$

$$\frac{\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}}{2}\geqq\sqrt{\frac{(b-a)^2}{ab}} \qquad \therefore \ \frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}\geqq\frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}$$

よって $\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}$ の最小値は $\frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}$ となり, そのとき $\frac{b-a}{ab}t=(b-a)\frac{1}{t}$ より

$t^2=ab$ $t>0$ より $t=\sqrt{ab}$ となります。

(2) $\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}\geqq\frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}$ より, $f(t)$ の最大値 M は

$f(t)=\frac{1}{2}\left|\frac{b^2-a^2}{ab}-\left\{\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}\right\}\right|$ に $\frac{b-a}{ab}t+(b-a)\frac{1}{t}=\frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}$ を代入し,

$$M=\frac{1}{2}\left|\frac{b^2-a^2}{ab}-\frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(b^2-a^2)-2\sqrt{ab}(b-a)}{ab}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(b-a)(b-2\sqrt{ab}+a)}{ab}\right|$$

$=\frac{(b-a)(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2ab}$ となります。 更にこれに $a=1$, $b=2$ を代入し

$M=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ となりますね。

どうです。微分を使った最初の解答の方が圧倒的に楽ですよね。おそらく本来、この問題は理系の問題で、微分を使った解き方を想定してあったのではと思います。別解はちょっと大変すぎますよね。