メジアン（新課程）90番

問題　実数 a , b , c に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

(1)　$2(a^4+b^4) \geqq (a+b)(a^3+b^3)$

(2)　$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$

方針　一般的に(1)のような不等式は，左辺から右辺を引いて，それを完全平方式に変形して0以上となることを使って証明します。また，この問題のように複数の小問が並ぶ場合は，(1)の結果を利用して次の問題を証明するのが普通ですが，この問題はストレートに(1) と同じことを試みれば，(2) を解答することが出来ます。では，実際に解いてみましょう。

解答

(1) (左辺)－(右辺)$=2a^4+2b^4-a^4-ab^3-a^3b-b^4$

$$=a^4-a^3b-(ab^3-b^4)$$
$$=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a-b)^2\left\{\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\} \geqq 0$$

よって (左辺)≧(右辺) となり，与式は成立する。　なお，等号成立は $a=b$ のとき。

(2) (左辺)－(右辺)$=3a^4+3b^4+3c^4-a^4-ab^3-c^3a-a^3b-b^4-bc^3-ca^3-b^3c-c^4$

$$=(a^4-a^3b-ab^3+b^4)+(b^4-b^3c-bc^3+c^4)+(c^4-c^3a-ca^3+a^4)$$
$$=\{a^3(a-b)-b^3(a-b)\}+\{b^3(b-c)-c^3(c-a)\}+\{c^3(c-a)-a^3(c-a)\}$$
$$=(a-b)^2\left\{\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^3\right\}+(b-c)^2\left\{\left(b+\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right\}+(c-a)^2\left\{\left(c+\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{3}{4}a^2\right\} \geqq 0$$

よって (左辺)≧(右辺) となり，与式は成立する。　なお，等号成立は $a=b=c$ のとき。