メジアン（新課程）91番

問題　$P=(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

(1)　整式 P を因数分解せよ。

(2)　実数 a , b , x , y が $P\fallingdotseq 0$ を満たすとき，不等式　$\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|<|x-a|+|y-b|$ が成り立つことを示せ。

方針　(1) は一旦展開して，因数分解すれば良いですね。(2) は，このままでは証明できません。両辺が共に0以上ですから，両辺を２乗しても同値なので，その２乗した式を証明します。

解答

(1)　$P=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2=b^2x^2-2abxy+a^2y^2=(bx-ay)^2$

(2)　両辺共に 0 以上だから

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|<|x-a|+|y-b| \iff \left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|^2<(|x-a|+|y-b|)^2$$

$$\iff (|x-a|+|y-b|)^2-\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|^2>0 \quad \cdots\cdots ①$$

よって　①式が成り立つことを証明すれば良い。

さて

$$(\text{①式の左辺})=x^2-2ax+a^2+2|x-a||y-b|+y^2-2by+b^2-x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}-a^2-b^2$$

$$=2|x-a||y-b|+2\left\{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}-(ax+by)\right\}$$

まず，$P\fallingdotseq 0$ だから, $P=(bx-ay)^2>0$ である。

(ア)　$ax+by<0$ のとき

$|x-a||y-b|\geqq 0$ ，$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}-(ax+by)>0$ だから，(①式の左辺)>0　となる。

(イ)　$ax+by\geqq 0$ のとき

$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$ と $ax+by$ は共に 0 以上だから，その大小は２乗の大小と同じである。

ところが, $P=(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(bx-ay)^2>0$ だから，$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}-(ax+by)>0$ が成り立つと言え，これと $|x-a||y-b|\geqq 0$ より，(①式の左辺)>0 となる。

(ア) , (イ)より ①式は成立し，与式は成立すると言える。