メジアン（新課程）92番

類題 実数 a, b, c, d が $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases}$ を満たすとする。このとき，$\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ または $\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$ であることを示せ。

方針 まるでパズルのような問題ですが，発想の原点は $a^2+b^2=c^2+d^2$ が $a^2-d^2=c^2-b^2$ となり，
更に，$(a-d)(a+d)=(c-b)(c+b)$ と因数分解されることにあります。「難しい」と決めつけずに，パズルを解くつもりで楽しめると良いですね。

解答 $\begin{cases} a+b=c+d \cdots ① \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \cdots ② \end{cases}$ について，①より　$a-d=c-b \cdots ①'$　また②より　$a^2-d^2=c^2-b^2$

更に，$(a-d)(a+d)=(c-b)(c+b) \cdots ②'$

(ア)　$a-d=c-b \neq 0$ のとき，②'を①'で辺々割って

$a+d=c+b \cdots ③$　　①'＋③ より　$2a=2c$　$\therefore a=c$　また，③－①' より $2d=2b$　$\therefore b=d$

よって $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

(イ)　$a-d=c-b=0$ のとき，$\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$