メジアン（新課程）93番

問題　正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，不等式　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{9}{a+b+c}$　を証明せよ。また，等号が成り立つための条件を求めよ。

方針　多くの等式や不等式の証明問題において，そのままでは証明するのが難しいため，それと同値関係にある．より易しい式に変形し，それを証明するという手法を取ることがあります。この問題もまさにそういうタイプの問題で，分数式のままでは難しいので，分母を払った式を作り，それを証明することになります。

解答　$a,\ b,\ c$ は全て正の実数なので，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{9}{a+b+c} \iff (a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 9abc$ ……①

よって，①式を証明すれば，与式を証明したことになる。

さて，①式について

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc-9abc \\
&= a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2bc+b^2) \\
&= a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，(左辺)≧(右辺) となり，①式が成立し，与式は成立する。等号成立は　$a=b=c$　のとき。