２次導関数と不等式（応用編 ①）

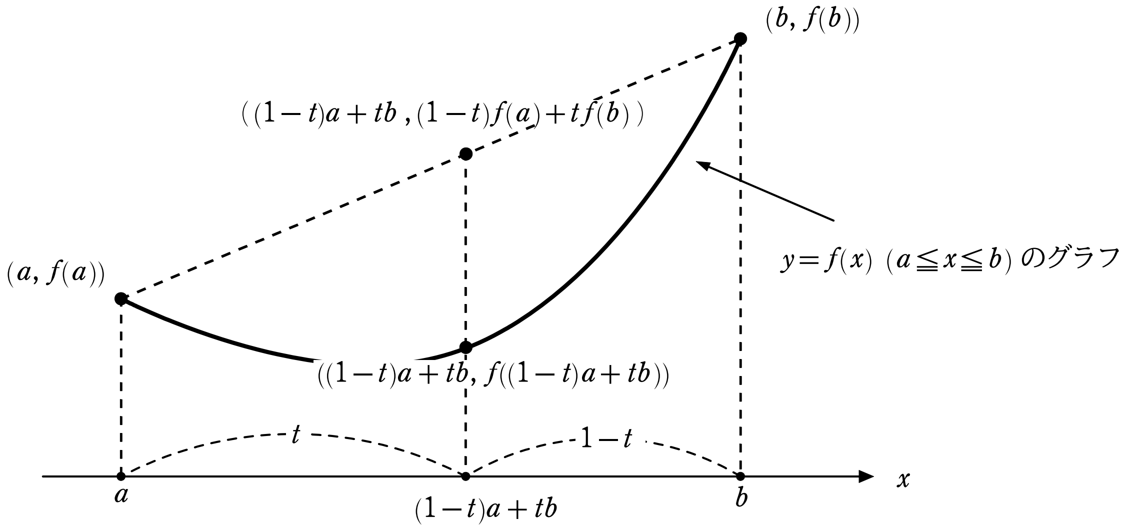
微分を利用して不等式を証明する問題は、言わば微分の頻出問題の１つですが、２次導関数を使った問題が度々出題されます。今回は、そんな問題に挑戦してみましょう。

$\boxed{\text{問題}}$ 関数 $y=f(x)$ の２次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする。このとき、実数 $a,b,t\ (a<b\ ,\ 0\leqq t\leqq 1)$ について、不等式　$f((1-t)a+tb)\leqq(1-t)f(a)+tf(b)$　が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、どのような場合か。

（大阪市立大）

$\boxed{\text{解答}}$ まず、この問題を解く前に、この式が表している図形的な意味について語りましょう。 $y=f(x)$ は、その2次導関数 $f''(x)$ が常に正ですから、そのグラフは下に凸だと言えます。なぜだか分かりますか。 $f''(x)>0$ ということは、$f'(x)$ の値は単調に増加します。 $f'(x)$ は $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,f(x))$ における接線の傾きですから、グラフが下に凸の時には、確かに x の値が増加するに従い接線の傾きは増加していきますね。

さて、式の図形的意味ですが、まず以下のグラフを見て下さい。



下に凸のグラフ $y=f(x)\ (a\leqq x\leqq b)$ において、 x軸上の x 座標が aとb の2点を結ぶ線分を $t:(1-t)$ に内分する点 $x=(1-t)a+tb$ におけるグラフ上の y 座標$f((1-t)a+tb)$ は、2点 $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を結ぶ線分を $t:(1-t)$ に内分する点の y 座標 $(1-t)f(a)+tf(b)$ よりも下にあります。また、 $t=0\ ,1$のときは、2つは等しくなりますね。よって、$f((1-t)a+tb)\leqq(1-t)f(a)+tf(b)$ が成り立つと分かります。

さて、これを微分を使って計算で証明してみましょう。不等式の問題は、とりあえず全ての項を一方に移項して、関数を定義し、それが０以上（あるいは正）となることを証明するのが普通です。これもその定石通りのやり方で解くことが出来ます。

$g(t)=(1-t)f(a)+tf(b)-f((1-t)a+tb)$（但し、 $a\ ,b$は定数、tは変数と考え、$0\leqq t\leqq 1$ とする。）とおくと、

$g'(t)=-f(a)-f'((1-t)a+tb)(-a+b)$, 更に $g''(t)=-f''((1-t)a+tb)(-a+b)^2<0$ （∵常に $f''(x)>0$, $a<b$ より、$(-a+b)^2>0$ ）　よって、 $g(t)=(1-t)f(a)+tf(b)-f((1-t)a+tb)$ （ $0\leqq t\leqq 1$ ）のグラフは上に凸だと言えます。この時、 $g(0)=f(a)-f(a)=0$, $g(1)=f(b)-f(b)=0$ となり、 $0\leqq t\leqq 1$ において、 $g(t)\geqq 0$ と言えます。よって、実数 $a,b,t\ (a<b\ ,\ 0\leqq t\leqq 1)$ について、不等式　$f((1-t)a+tb)\leqq(1-t)f(a)+tf(b)$　が成り立つことになります。分かりましたか。

なお、 $g(t)=(1-t)f(a)+tf(b)-f((1-t)a+tb)$ （ $0 \leqq t \leqq 1$ ）のグラフは次のようになります。