メジアン（新課程）99番

問題　９で割り切れる整数全体の集合を A , 15で割り切れす整数全体の集合を B とする。$C=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$ とするとき, C は３で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ。

方針　問題文に「３で割り切れる整数全体の集合」と出てますが, この集合には名前がついていません。そこで, この集合に D と名前をつけることにしましょう。集合を表す数学の表記に従えば, 例えば, $D=\{3k \mid k\text{は整数}\}$ と書くことが出来ます。さて, ２つの集合 C , D が等しいことは，どう証明したら良いのでしょうか。それには $C\subset D$ （集合 C が集合 D の部分集合であることを示します。）であり，かつ $C\supset D$ （集合 D が集合 C の部分集合であることを示します。）を示せば良いのです。では，例えば $C\subset D$ であることは, どう示せば良いのでしょうか。そのためには，仮に C の任意の要素（「任意の要素」とは,「 全ての要素」と解釈すれば良い。）を a とすると , a が D の要素となること, つまり $a\in D$ であることを示せば良いのです。これだけのことを前提として, この問題を解いてみましょう。

解答　まず「３で割り切れる整数全体の集合」を D と名づけましょう。つまり $D=\{3k \mid k\text{は整数}\}$ とおきます。さて集合 C の任意の要素 $x+y$ （但し, $x\in A$, $y\in B$, A は９の倍数の集合, B は15の倍数の集合）について, $x=9l$, $y=15m$ （ l, m は整数）とおくと, $x+y=9l+15m=3(3l+5m)$ となります。ここで $3l+5m$ は整数だから, $x+y\in D$ が成り立つと言え , $C\subset D \cdots$ ① が成り立つと言えます。次に集合 D の任意の要素を $3k$ （ k は整数）とおくと, $3k=-27k+30k=9(-3k)+15(2k)$ となり, $-3k$ と $2k$ は共に整数だから , $9(-3k)\in A$, $15(2k)\in B$ が言え , $3k\in C$ が成り立つことになり, $C\supset D \cdots$ ② が成り立つと言えます。よって ①, ②より $C=D$, つまり C は３で割り切れる整数全体の集合と一致することが言えたことになります。

補足　この手の問題は慣れないととても難しく感じると思います。恐らくこんな問題をいきなり出題されたら, クラスの中で正しく解答できる人は一割にも満たないでしょう。つまり，大半の人は解けないということです。でも, どんなに難しく思えることでも，何度も繰り返せばだんだん難しく感じなくなるものです。思い出してください。初めて自転車に乗る練習をしたときも, とても難しく思ったでしょう。慣れてしまった今では , とても簡単ですよね。勉強だって，それと全く同じです。このことを決して忘れないでくださいね。