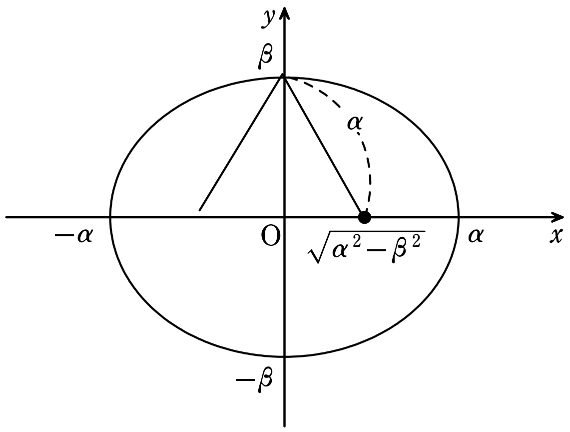
楕円と双曲線の焦点が一致する問題

by Aokijuku

問題　楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 C_2 ： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。　　　　(北海道大学)

指針　楕円と双曲線ついては、式とグラフの関係や、グラフから２焦点の座標がすぐに目に浮かぶようでなければなりません。

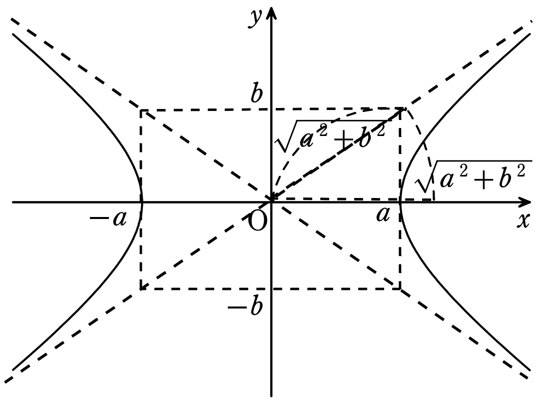


左のグラフは $0<\beta<\alpha$ としたときの

$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ のグラフです。

図形の中の手がかりより、２焦点の座標は

$(\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\ ,0)$ と分かります。



左のグラフは $0<b<a$ としたときの

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフです。

図形の中の手がかりより、２焦点の座標は

$(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ と分かります。

解答　双曲線の焦点が x軸上にあり、２つのグラフの焦点が一致することより $0<|\beta|<|\alpha|$ 、また $0<|b|<|a|$ と言える。このとき、２つのグラフの焦点はそれぞれ $(\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\ ,0)$, $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ となり、この２つが一致することより

$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2$　つまり $\alpha^2=a^2+b^2+\beta^2 \cdots$ ① となる。　さて、２つのグラフの交点の座標を (s, t) とすると、

C_1 の接線の方程式は $\dfrac{sx}{\alpha^2}+\dfrac{ty}{\beta^2}=1$ より　$y=-\dfrac{s\beta^2}{t\alpha^2}x+\dfrac{\beta^2}{t} \cdots$ ② となり、また　C_2 の接線の方程式は

$\dfrac{sx}{a^2}-\dfrac{ty}{b^2}=1$ より　$y=\dfrac{sb^2}{ta^2}x-\dfrac{b^2}{t} \cdots$ ③　となる。

ところで　点 $(s\ ,t)$ は C_1 , C_2 のグラフ上にあるので　$\dfrac{s^2}{\alpha^2}+\dfrac{t^2}{\beta^2}=1$ より　$\beta^2s^2+\alpha^2t^2=\alpha^2\beta^2$　$\cdots$ ④

また　$\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}=1$ より　$b^2s^2-a^2t^2=a^2b^2 \cdots$ ⑤　が成り立つ。

④, ⑤を s^2 , t^2 の連立方程式と見なして解くと

④× a^2+⑤× α^2 より　$(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)s^2=a^2\alpha^2\beta^2+a^2b^2\alpha^2$　　つまり　$s^2=\dfrac{a^2\alpha^2(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$ …⑥

また、④× b^2 −⑤× β^2 より　$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)t^2=b^2\alpha^2\beta^2-a^2b^2\beta^2$　　つまり　$t^2=\dfrac{b^2\beta^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}$ …⑦

ところで２本の接線②と③の傾きを掛け合わせると　$-\dfrac{s^2b^2\beta^2}{t^2a^2\alpha^2}$ になる。これに⑥と⑦を代入し

$$-\frac{s^2b^2\beta^2}{t^2a^2\alpha^2}=-\frac{\dfrac{a^2\alpha^2(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}\times b^2\beta^2}{\dfrac{b^2\beta^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}\times a^2\alpha^2}=-\frac{b^2+\beta^2}{\alpha^2-a^2}$$

となり。更に、これに①を代入し

$$-\frac{s^2b^2\beta^2}{t^2a^2\alpha^2}=-\frac{b^2+\beta^2}{b^2+\beta^2}=-1$$

よって②, ③の２つの接線の傾きの積が−1となったので、２つの接線は直交すると言える。