楕円の外部の点から引いた接線　by Aokijuku

問題　楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $P(a\,,b)$ から引いた２本の接線が直交するような点 P の奇跡を求めよ。

（東京工業大学）

方針　接線の傾きを m として接線の方程式を作り、それと楕円が接することから判別式へとつなげる。

解答　解答　接線の傾きを m とすると、接線の方程式は $y-b=m(x-a)$ 、つまり $y=mx-(am-b)$ とおける。これを楕円の方程式に代入すると $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{\{mx-(am-b)\}^2}{8}=1$　分母を払って整理すると

$8x^2+17\{mx-(am-b)\}^2-17\times8=0$　$(17m^2+8)x^2-2\times17m(am-b)x+17(am-b)^2-17\times8=0$

この x の２次方程式は重解を持つので、その判別式を D_1 とすると

$\dfrac{D}{4}=17^2m^2(am-b)^2-(17m^2+8)\times17\{(am-b)^2-8\}=0$

両辺を17で割って　$17m^2(am-b)^2-(17m^2+8)\{(am-b)^2-8\}=0$

$17m^2(am-b)^2-17m^2(am-b)^2+17m^2\times8-8(am-b)^2+64=0$

$17m^2\times8-8(am-b)^2+64=0$　両辺を8で割って　$17m^2-(am-b)^2+8=0$

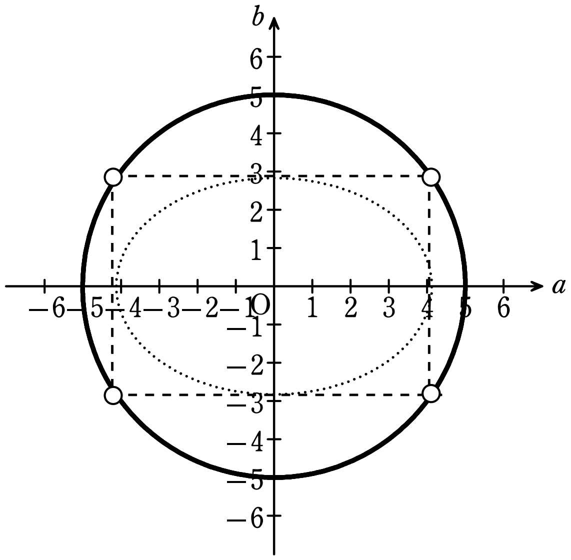
$(17-a^2)m^2+2abm-(b^2-8)=0$ …①

（ｉ）$17-a^2\fallingdotseq0$, つまり $a\fallingdotseq\pm\sqrt{17}$ のとき

①の m の２次方程式は異なる２つの実数解を持つので、その判別　式を D_2 とすると、

$\dfrac{D_2}{4}=a^2b^2+(17-a^2)(b^2-8)>0$　$8a^2+17b^2-8\times17>0$

つまり $\dfrac{a^2}{17}+\dfrac{b^2}{8}>1$ のとき　①式の２解を $m_1\,,m_2$ とすると、２本の接線は直交するので、２次方程式の解と係数の関係より　$m_1\cdot m_2=-\dfrac{b^2-8}{17-a^2}=-1$　分母を払うと　$b^2-8=17-a^2$　$a^2+b^2=25$



注　内部の楕円が $\dfrac{a^2}{17}+\dfrac{b^2}{8}=1$

$a^2+b^2=25$ の円は、その外側にある。

また、 $a\fallingdotseq\pm\sqrt{17}$ より 円上の４点が除かれる。

（ⅱ）$17-a^2=0$，つまり $a=\pm\sqrt{17}$ のとき

点 $P(\pm\sqrt{17}\,,b)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ に２本の垂直な接線を引　けるような b の値は　$b=\pm 2\sqrt{2}$ となる。

つまり、上の円で除かれた４点を表すことになる。

（ⅰ），（ⅱ）より、求める点 $P(a\,,b)$ の軌跡は、円 $a^2+b^2=25$ である。